ZGODNE Z USZCZUPLONĄ PODSTAWĄ PROGRAMOWĄ

ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH

Nowa teraz matura

FIZYKA

- sposoby rozwiązywania zadań maturalnych
- przykłady rozwiązanych zadań z licznymi komentarzami
- zadania CKE
- arkusze maturalne

nowa era

MATERIAŁY NA OSTATNIĄ PROSTĄ

Spis treści

SPRAWDŹ AKTUALNOŚCI CKE

app.nowaterazmatura.pl
Kod: K9K46B

app.nowaterazmatura.pl
Kod: ETTS27
Dodatek matematyczny

Pobierz zasoby pod kodami QR

app.nowaterazmatura.pl
Kod: 8EU7V2
Arkusz 2. z rozwiązaniami

app.nowaterazmatura.pl
Kod: VT8R23
Arkusz 3. z rozwiązaniami

app.nowaterazmatura.pl
Kod: NVVBXN
Arkusz CKE marzec 2022 z rozwiązaniami

app.nowaterazmatura.pl
Kod: LE6D4N
Arkusz CKE maj 2023 z rozwiązaniami

app.nowaterazmatura.pl
Kod: 2PPRJ1
Karta wzorów CKE

Co znajdziesz w Zbiorze zadań maturalnych?

Zbiór zadań maturalnych „NOWA Teraz matura” doskonale sprawdzi się w przygotowaniu do egzaminu maturalnego. Pomoże Ci w systematycznej nauce rozwiązywania zadań, ćwiczeniu przed maturą i sprawdzaniu umiejętności. Zawiera przykłady i zadania odnoszące się do wszystkich zagadnień obowiązujących na maturze. Jest w pełni skorelowany z Vademecum i zawiera kody dostępu do materiałów w aplikacji app.nowaterazmatura.pl

→ **Jest na to sposób,** patrz s. 25

Jest na to sposób pokazuje krok po kroku, jak sobie radzić z rozwiązywaniem złożonych problemów fizycznych i sprawdzić stopień opanowania omawianego zagadnienia.

CKE 2021 MARZEC

Pogrupowane w działy i odpowiednio oznaczone zadania CKE zostały wybrane pod kątem stopnia trudności i powtarzalności zagadnień.

Zadanie często na maturze

Zadania trudne i często pojawiające się na maturze oznaczono w odpowiednich miejscach na marginesie. Przy zadaniach znajdują się również informacje, jakie wielkości fizyczne, prawa i zasady są potrzebne do ich rozwiązania.

☆

Trudniejsze zadania zostały oznaczone gwiazdką.

W taki sposób oznaczono zadania, do których rozwiązania trzeba użyć linijki lub kalkulatora naukowego.

Uwaga: Należy pamiętać, aby długość sprężyny wyrazić w metrach.

Wskazówki umieszczone w ramkach ułatwiają samodzielne rozwiązywanie zadań.

→ **Przykład 1.,** patrz s. 25

Odsyłacze przy zadaniach analogicznych do przykładów pozwalają sprawnie poruszać się po zbiorze zadań. Jeśli masz problem z rozwiązaniem zadania, przeanalizuj jeszcze raz przykład i zamieszczone tam komentarze.

V

Sprawdź w Vademecum
Tytuł
s. 1–2

Odsyłacze do Vademecum pozwalają szybko odszukać informacje potrzebne do rozwiązania zadania, dotyczące zagadnień teoretycznych, matematycznych i kalkulatora naukowego.

Treści spoza wymagań egzaminacyjnych.

Obejrzyj doświadczenie obowiązkowe
app.nowa
terazmatura.pl
Kod: Z8KE3H
Film: **Tarcie**

Kody QR na marginesach zapewniają dostęp do dodatkowych materiałów cyfrowych wspierających przygotowania do egzaminu, m.in. filmów z doświadczeniami i rozwiązaniami zadań, a także rozwiązań wszystkich zadań ze zbioru zadań maturalnych.

app.nowa
terazmatura.pl
Kod: KSNMMG
Rozwiązanie zadań 1.–10.

Krótkie odpowiedzi do wszystkich zadań znajdziesz na końcu publikacji, a pełne rozwiązania pod kodami QR.

1. Kinematyka

Zadania z przykładowymi rozwiązaniami

Przykład 1. Samochód

Samochód ruszył ze stałym przyspieszeniem i jechał tak do chwili t_1, w której osiągnął prędkość $v_1 = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Następnie do chwili $t_2 = 20\ \text{s}$ jego ruch był jednostajny. Od startu do chwili t_2 samochód przebył drogę $s = 300\ \text{m}$.

Przykład 1.1 (0–1)

Naszkicuj wykres $v(t)$ zależności wartości prędkości od czasu. Na osiach zaznacz tylko v_1, t_1, t_2 bez podawania ich wartości liczbowych, czyli bez uwzględnienia skali na osiach.

Przykład 1.2 (0–2)

Oblicz czas t_1 trwania ruchu jednostajnie przyspieszonego.

Przykład 1.3 (0–2)

W chwili t_2 samochód rozpoczął hamowanie ruchem jednostajnie opóźnionym i zatrzymał się po przejechaniu $40\ \text{m}$.

Oblicz czas hamowania i przyspieszenie samochodu.

Przykład 2. Opis ruchu (0–1)

Punkt porusza się wzdłuż osi x. Położenie punktu zmienia się w czasie zgodnie z zależnością $x(t) = 2t^2 + 10t + 20$. Wartości liczbowe współczynników równania ruchu podano w podstawowych jednostkach SI.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

W tym czasie punkt porusza się cały czas w tę samą stronę.

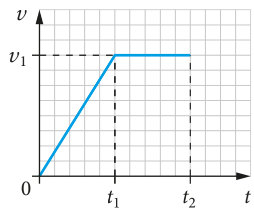
1.	W chwili $t = 0$ punkt jest w początku układu współrzędnych.	P	F
2.	Przyspieszenie punktu ma wartość $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.	P	F
3.	W pierwszej sekundzie ruchu punkt przebywa drogę $12\ \text{m}$.	P	F

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE Z KOMENTARZEM

Przykład 1.1

Z analizy zadania wynika, że do chwili t_1 samochód poruszał się ruchem jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej. Podczas tego ruchu trwającego przez czas t_1 uzyskał prędkość v_1 i z tą prędkością poruszał się do chwili t_2, liczonej od chwili startu.
W ruchu jednostajnie przyspieszonym wykresem $v(t)$ jest linia prosta nachylona pod pewnym kątem do osi czasu, a w przypadku opisywanego ruchu – przechodząca również przez początek układu współrzędnych.
W ruchu jednostajnym wartość prędkości jest stała w czasie, stąd wykres $v(t)$ zależności prędkości od czasu jest prostą równoległą do osi czasu. Wykres $v(t)$ w przedziale czasu $(0–t_2)$ jest funkcją ciągłą.

Rys. 1



Punktacja:

1 pkt – narysowanie poprawnego wykresu razem z oznaczeniami.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE Z KOMENTARZEM

Przykład 1.2

Korzystamy z wykresu zależności prędkości od czasu $v(t)$ (rys. 1) i układamy równanie z niewiadomą t_1.
Przyjmujemy, że mamy dane: drogę s, czas t_2 i prędkość v_1.
Droga może być obliczona jako pole powierzchni obszaru ograniczonego wykresem zależności prędkości od czasu, stąd droga odpowiada liczbowo polu figury, w tym przypadku polu trapezu.
Ze wzoru na drogę (pole trapezu) można obliczyć czas t_1.

$$s = \frac{1}{2}\left(t_2 + (t_2 - t_1)\right)v_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 2t_2 - \frac{2s}{v_1} = 2 \cdot 20\ \mathrm{s} - \frac{2 \cdot 300\ \mathrm{m}}{20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 10\ \mathrm{s}$$

Trzeba pamiętać o jednostkach czasu i prędkości.

Odpowiedź: Czas t_1 jest równy $10\ \mathrm{s}$.

Punktacja:
2 pkt – obliczenie czasu t_1,
1 pkt – wybór poprawnej metody.

Przykład 1.3

Sposób 1.

Oznaczamy przez t czas trwania ruchu jednostajnie opóźnionego z prędkością początkową v_1 aż do zatrzymania ($v = 0$).
Zapisujemy równania ruchu jednostajnie opóźnionego z prędkością początkową v_1, gdzie t – czas trwania tego ruchu aż do zatrzymania ($v = 0$):

$$\begin{cases} s = v_1 t - \frac{1}{2}at^2 \\ v = v_1 - at \end{cases}$$

Znak minus we wzorze oznacza, że prędkość będzie malała o tę samą wartość w jednostce czasu.

Rozwiązujemy układ równań i otrzymujemy czas:

$$t = \frac{2s}{v_1} = \frac{2 \cdot 40\ \mathrm{m}}{20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 4\ \mathrm{s}$$

oraz wartość przyspieszenia:

$$a = \frac{v_1}{t} = \frac{20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{4\ \mathrm{s}} = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Sposób 2.

Czas hamowania t możemy też wyznaczyć z drogi hamowania samochodu do jego zatrzymania. Droga ta jest równa polu trójkąta prostokątnego o bokach v_1 i t:

$$s = \frac{1}{2}v_1 t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2s}{v_1} = \frac{2 \cdot 40\ \mathrm{m}}{20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 4\ \mathrm{s}$$

Odpowiedź: Czas hamowania wynosił $4\ \mathrm{s}$, a wartość przyspieszenia $5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Punktacja:
2 pkt – obliczenie przyspieszenia,
1 pkt – obliczenie czasu.

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE Z KOMENTARZEM

Przykład 2.

Rozwiązanie: 1. F, 2. F, 3. P

Obieramy kierunek osi x układu współrzędnych zgodnie ze zwrotem wektora prędkości i zapisujemy kinematyczne równanie ruchu jednostajnie zmiennego w postaci:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

gdzie: x_0 – współrzędna określająca położenie początkowe, v_0 – prędkość początkowa, a – przyspieszenie.

1. Fałsz. Położenie w chwili $t = 0$ jest równe $x(0) = 2 \cdot 0^2 + 10 \cdot 0 + 20 = 20\ \mathrm{m}$.
2. Fałsz. Z porównania równania $x(t) = 2t^2 + 10t + 20$ z ogólnym równaniem ruchu $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ otrzymujemy $\frac{1}{2}a = 2 \ \rightarrow \ a = 4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
3. Prawda. Z równania drogi $s = 2t^2 + 10t$ dla $t = 1\ \mathrm{s}$ otrzymujemy $s = 12\ \mathrm{m}$.

Sprawdź w Vademecum *Równanie ruchu prostoliniowego jednostajnie zmiennego*, s. 38

app.nowa
terazmatura.pl
Kod: NTT43J
Rozwiązania zadań 1.–25.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1.

Od chwili $t_0 = 0$ obserwowano ruch samochodu, który przez pewien czas jechał ze stałą prędkością o wartości $v_0 = 12\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. W chwili t_1 zaczął hamować i zatrzymał się w chwili $t_2 = 6\ \mathrm{s}$. Drogi przebyte przez samochód ruchem jednostajnym i jednostajnie opóźnionym były jednakowe.

Przykład 1., patrz s. 34

Zadanie 1.1 (0–3)

Oblicz drogę samochodu w czasie sześciu sekund ruchu od chwili t_0 do chwili t_2.

Sprawdź w Vademecum *Równanie ruchu jednostajnego prostoliniowego*, s. 37

Zadanie 1.2 (0–1)

Naszkicuj wykres $v(t)$. Na osiach zaznacz tylko wartości v_1, t_1, t_2. Wyskaluj osie.

W ruchu jednostajnie opóźnionym wykresem $v(t)$ jest linia prosta nachylona pod kątem do osi czasu.

Zadanie 1.3 (0–1)

Uzupełnij zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź wybraną spośród A–C oraz spośród 1–3.

Samochód podczas hamowania przebył drogę

A.	24 m,	a średnia wartość jego prędkości była równa	**1.**	$6\ \frac{m}{s}$.
B.	48 m,		**2.**	$8\ \frac{m}{s}$.
C.	72 m,		**3.**	$12\ \frac{m}{s}$.

Sprawdź w Vademecum *Średnia wartość prędkości*, s. 36

Zadanie 2. (0–2)

Ciało porusza się wzdłuż osi x ruchem jednostajnie zmiennym. Współrzędne jego położenia, prędkości i przyspieszenia w chwili $t_0 = 0$ są następujące:

$$x_0 = 0, \qquad v_{0x} = 4\ \frac{m}{s}, \qquad a_{0x} = -2\ \frac{m}{s^2}$$

Oblicz przemieszczenie i drogę ciała w czasie pierwszych czterech sekund ruchu.

Przykład 2., patrz s. 35

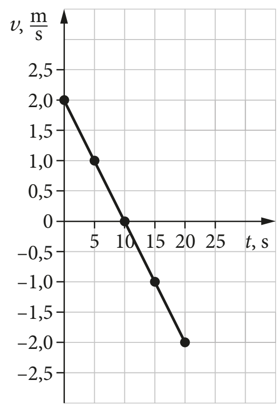
Zadanie 3. (0–2)

Na prostej drodze samochód ruszył i ze stałym przyspieszeniem pokonał odległość 100 m.

Ustal, ile razy więcej czasu zajęło mu pokonanie pierwszej połowy drogi niż przejechanie drugiej połowy drogi.

Zadanie 4.

Na wykresie przedstawiono zależność prędkości od czasu dla pewnego pojazdu poruszającego się na prostym odcinku drogi.



Pamiętaj, aby wszystkie wielkości wyrazić w jednostkach podstawowych układu SI.

Zadanie 4.1 (0–2)

Zapisz równanie zależności $v(t)$ przedstawionej na wykresie.

Sprawdź w Vademecum *Pole pod wykresem zależności prędkości od czasu*, s. 39

Zadanie 4.2 (0–2)

Oblicz drogę, jaką pokonał ten pojazd w czasie 20 s.

Sprawdź w Vademecum *Wykres $v(t)$ a zmiana położenia ciała*, s. 39

Sprawdź w Vademecum *Wektor przemieszczenia*, s. 36

Zadanie 4.3 (0–2)

Oblicz przemieszczenie pojazdu po 20 s.

Zadanie 5.

Uczniowie przeprowadzili doświadczenie polegające na badaniu zależności drogi pokonanej przez klocek zsuwający się z równi pochyłej o kącie nachylenia 45° od czasu. W tabeli zapisali wyniki pomiarów drogi s oraz kwadrat czasu t^2, w jakim klocek zsunął się z równi. Uczniowie przyjęli niepewności pomiarowe $\Delta s = 0{,}01\ \mathrm{m}$ i $\Delta t^2 = 0{,}01\ \mathrm{s}^2$.

s, m	t^2, s^2
0,10	0,04
0,20	0,09
0,25	0,11
0,30	0,12
0,40	0,17
0,50	0,21

Zadanie 5.1 (0–3)

Na podstawie danych przedstawionych w tabeli sporządź wykres zależności $s(t^2)$, nanosząc punkty wraz z niepewnością pomiarową.

Sprawdź w Vademecum *Niepewności pomiarowe na wykresie*, s. 25

Zadanie 5.2 (0–2)

Oblicz wartość przyspieszenia klocka. Załóż, że współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez wszystkie punkty wykresu zależności $s(t^2)$ (w granicach niepewności pomiarowych) wynosi 2,38.

Sprawdź w Vademecum *Droga w ruchu jednostajnie zmiennym*, s. 39

Zadanie 6.

Klucz gęsi poruszał się w kierunku północnym z prędkością o wartości $36\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ względem powietrza przy wietrze wiejącym z zachodu. Wartość prędkości wiatru wynosiła $18\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Wskazówka: Przyjmij, że ptaki lecą na północ, ale wiatr znosi je na wschód.

Zadanie 6.1 (0–2)

Oblicz wartość prędkości wypadkowej, z jaką klucz gęsi poruszał się względem ziemi.

Skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa.

Zadanie 6.2 (0–1)

Dodatek matematyczny, patrz s. 472.

Oszacuj kąt, jaki tworzy wektor wypadkowej prędkości klucza gęsi z kierunkiem północnym.

Zadanie 6.3 (0–1)

Wybierz poprawne dokończenie zdania.

Opisany klucz gęsi przemieści się o $72\ \mathrm{km}$ na północ w czasie:

A. takim samym jak w dzień bezwietrzny.

B. dwa razy krótszym niż w dzień bezwietrzny.

C. dwa razy dłuższym niż w dzień bezwietrzny.

D. ok. $1{,}1$ raza dłuższym niż w dzień bezwietrzny.

Zadanie 7. (0–1)

Sprawdź w Vademecum *Spadek swobodny*, s. 41

Uczniowie podczas lekcji puszczali stalową kulkę z różnych wysokości i mierzyli czas jej spadku. Następnie dla każdej wysokości obliczyli prędkość średnią kulki. Siły oporów powietrza działające na kulkę podczas doświadczenia można było pominąć.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Wartość prędkości średniej jest wprost proporcjonalna do wysokości, z jakiej upuszczano kulkę.	**P**	**F**
2.	Wartość prędkości chwilowej spadającej swobodnie kulki jest proporcjonalna do czasu jej spadania.	**P**	**F**
3.	Wartość średniej prędkości jest dwukrotnie mniejsza od wartości prędkości chwilowej w chwili uderzenia kulki w podłogę.	**P**	**F**

Zadanie 8. (0–1)

Z końca sopla odrywają się w półsekundowych odstępach czasu krople wody.

Wybierz poprawne dokończenie zdania.

Jeżeli pominiemy opory ruchu, to można powiedzieć, że odległość pomiędzy dwiema spadającymi kroplami:

A. maleje z czasem.

B. rośnie liniowo z czasem.

C. nie zmienia się z czasem.

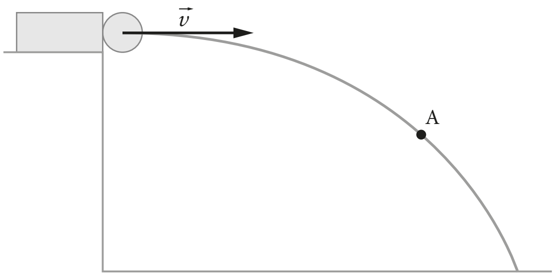
D. rośnie nieliniowo z czasem.

Zadanie 9.

Z ustawionego poziomo działa wystrzelono pocisk z prędkością o wartości $750\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Pomiń opór powietrza. Przyjmij $g = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Zadanie 9.1 (0–1)

Na poniższym rysunku zaznaczono schematycznie tor ruchu pocisku.



Narysuj wektor prędkości pocisku w punkcie A toru ruchu.

Sprawdź w Vademecum *Rzut poziomy. Prędkość w rzucie poziomym*, s. 41

Jest na to sposób, patrz s. 49

Zadanie 9.2 (0–3)

Oblicz odległość pocisku od działa po upływie 0,5 s od momentu jego wystrzelenia.

Sprawdź w Vademecum *Rzut poziomy*, s. 41

Zadanie 10.

Na okrągłej scenie obrotowej o promieniu 10 m znajduje się człowiek, który postanowił pokonać odległość od jej środka do brzegu, poruszając się wzdłuż promienia sceny z prędkością o stałej wartości. Dotarcie do brzegu sceny zajęło mu jedną minutę. W tym czasie scena wykonała jeden obrót.

Zadanie 10.1 (0–2)

Naszkicuj kształt toru osoby poruszającej się po scenie w dwóch różnych układach odniesienia: jednym, związanym z widownią siedzącą poza obracającą się sceną, i drugim, związanym z obracającą się sceną.

Sprawdź w Vademecum *Układ odniesienia*, s. 36

Zauważ, że człowiek poruszał się wzdłuż promienia sceny ze stałą prędkością.

Zadanie 10.2 (0–1)

Oblicz wartość prędkości człowieka poruszającego się po obracającej się scenie w układzie odniesienia z nią związanym.

Zadanie 10.3 (0–1)

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Podczas przemieszczania się po scenie wartość prędkości człowieka w układzie związanym z widownią była większa niż wartość jego prędkości w układzie związanym ze sceną.	P	F
2.	Człowiek poruszał się względem widowni ruchem jednostajnym.	P	F

Zadanie 11.

Uczeń jadący tramwajem wprawił w ruch obrotowy klucz zawieszony na smyczy. Przyjmij, że klucz wirował w płaszczyźnie poziomej po okręgu o promieniu $30\ \mathrm{cm}$ z prędkością o wartości $1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, a tramwaj poruszał się po linii prostej z prędkością o wartości $18\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Zadanie 11.1 (0–1)

Oblicz wartość przyspieszenia dośrodkowego klucza.

Sprawdź w Vademecum *Przyspieszenie dośrodkowe*, s. 44

Zadanie 11.2 (0–1)

Uzupełnij zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz elementy A lub B oraz 1 lub 2.

<table>
<tr><td rowspan="2">Przyspieszenie, z jakim porusza się klucz,</td><td>A.</td><td>zależy od prędkości tramwaju,</td><td rowspan="2">ponieważ poruszający się tramwaj jest układem</td><td>1.</td><td>inercjalnym.</td></tr>
<tr><td>B.</td><td>nie zależy od prędkości tramwaju,</td><td>2.</td><td>nieinercjalnym.</td></tr>
</table>

Zadanie 12. (0–1)

Samolot w pewnym przedziale czasu poruszał się w taki sposób, że jego torem ruchu była parabola, a wartość prędkości była stała.

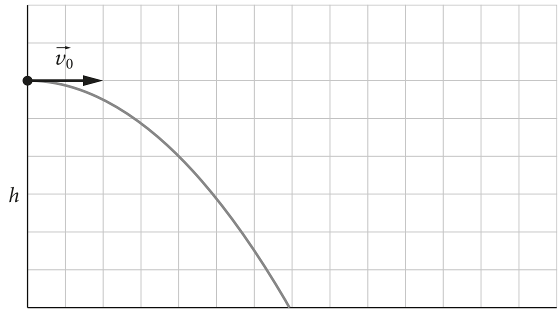
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	W opisanym przedziale czasu wartość przyspieszenia samolotu była stała.	P	F
2.	W opisanym przedziale czasu kierunek wektora przyspieszenia się zmieniał.	P	F
3.	W opisanej sytuacji samolot miał wyłączone silniki i poruszał się jedynie pod wpływem siły grawitacji.	P	F

Zadanie 13.

Piłka rzucona poziomo z wysokości h z prędkością o wartości $v_0 = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ uderzyła o ziemię z prędkością $\vec{v}$ pod kątem $60°$ do poziomu.

Jest na to sposób, patrz s. 49



Co możesz powiedzieć o poziomej składowej i pionowej składowej prędkość $\vec{v}$? Jaki wniosek na temat składowych prędkości możesz wyciągnąć?

Zadanie 13.1 (0–2)

Na schemacie powyżej narysuj i opisz wektor prędkości $\vec{v}$ oraz jego składowe poziomą i pionową w chwili uderzenia piłki o ziemię. Zachowaj proporcje długości wektorów.

Pamiętaj, że wektor prędkości jest zawsze styczny do toru ruchu.

Zadanie 13.2 (0–2)

Oblicz, z jakiej wysokości h rzucono piłkę.

Zadanie 13.3 (0–1)

Przyjmij wysokość $h = 34\ \text{m}$ i oblicz zasięg rzutu. Zapisz wynik z dokładnością do trzech cyfr znaczących. Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie jest równe $9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Sprawdź w Vademecum *Zasięg rzutu*, s. 42

Zadanie 14.

Światła mijania w samochodzie oświetlają skutecznie drogę w odległości 40 metrów. Przyjmij, że przyspieszenie hamującego samochodu jest równe $5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, a czas reakcji kierowcy, czyli czas, jaki upływa od momentu dostrzeżenia przeszkody do rozpoczęcia hamowania, jest równy $0{,}7\ \text{s}$.

Sprawdź w Vademecum
Równanie ruchu prostoliniowego jednostajnie zmiennego, s. 38

Zadanie 14.1 (0–1)

Oblicz drogę hamowania przy prędkości początkowej 50 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

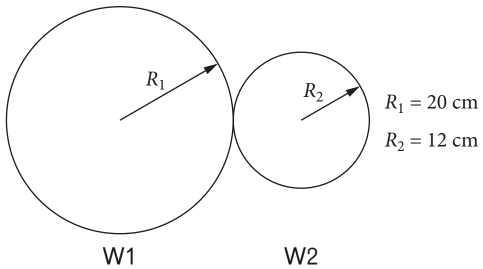
Zadanie 14.2 (0–3)

Oblicz, jaką maksymalną wartość prędkości może mieć samochód, aby mógł wyhamować przed przeszkodą znajdującą się w odległości równej zasięgowi świateł mijania.

Zadanie 15.

Co można powiedzieć o prędkości liniowej punktów na powierzchni walców?

Dwa walce W1 i W2 stykają się ze sobą. Oba się obracają, a w miejscu styku nie występuje poślizg.



Zadanie 15.1 (0–2)

Zapisz relacje między prędkościami liniowymi i kątowymi punktów na obwodzie walców. Wpisz znak wybrany spośród $<, =, >$.

$v_1 \dots\dots\dots v_2$ $\qquad$ $\omega_1 \dots\dots\dots \omega_2$

Zadanie 15.2 (0–2)

Skorzystaj ze wzoru $\alpha = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$.

Walec W1 obraca się z częstotliwością $f_0 = 5$ Hz. W pewnej chwili zaczyna jednostajnie przyspieszać swój ruch obrotowy z przyspieszeniem kątowym $\varepsilon = \pi \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$. Ruch przyspieszony trwa przez $t = 8$ s.

Oblicz liczbę obrotów walca W2 w tym czasie.

Zadanie 16. (0–2)

Dron pokonał trzy odcinki pewnej trasy. Na każdym z nich poruszał się ze stałą prędkością. Poniżej zapisano czas ruchu i współrzędne wektorów prędkości drona $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$ na kolejnych odcinkach. Wartości współrzędnych wektorów prędkości podano w $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

odcinek 1. $t_1 = 4$ s, $v_1 = [0, 0, 2]$

odcinek 2. $t_2 = 3$ s, $v_2 = [2, 0, 0]$

odcinek 3. $t_3 = 2$ s, $v_3 = [0, 2, 0]$

Oblicz drogę całkowitą i przemieszczenie drona.

Sprawdź w Vademecum *Wektor przemieszczenia*, s. 36

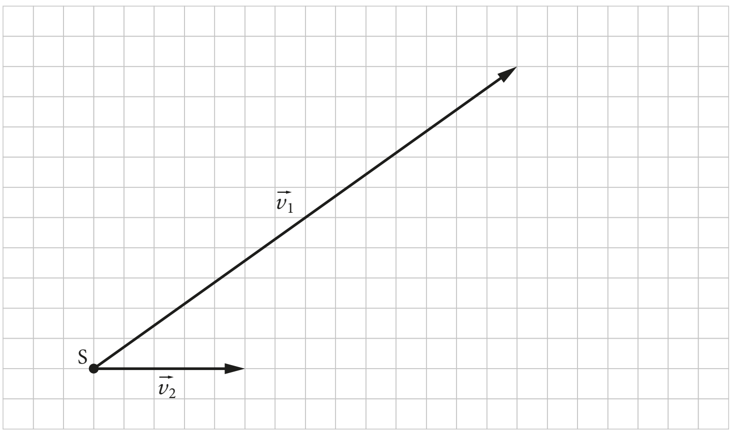
Wektor całkowitego przemieszczenia jest sumą przemieszczeń.

Zadanie 17. (0–2)

Samolot S leci podczas wietrznej pogody. Na rysunku przedstawiono wektor $\vec{v}_1$ prędkości samolotu względem powietrza i wektor $\vec{v}_2$ prędkości wiatru względem ziemi. Wartość prędkości wiatru wynosi $v_2 = 40\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Narysuj wektor prędkości samolotu względem ziemi $\vec{v}_3$ i wyznacz wartość tej prędkości z dokładnością do $1\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Do wyznaczenia prędkości samolotu względem powierzchni ziemi zastosuj metodę równoległoboku.



Zadanie 18. (0–2)

Położenie punktu materialnego zmienia się zgodnie z równaniami ruchu:

$$x(t) = 5 \cdot t^2 – 2 \cdot t + 4 \quad \text{oraz} \quad y(t) = 10$$

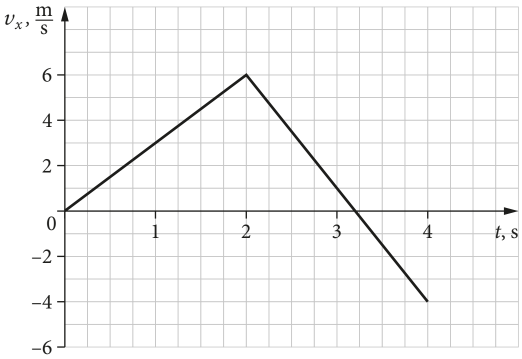
Współczynniki liczbowe w równaniach są podane w podstawowych jednostkach układu SI.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Torem ruchu punktu materialnego jest parabola.	**P**	**F**
2.	Wartość przyspieszenia punktu materialnego jest równa $5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.	**P**	**F**
3.	W chwili $t = 0$ wartość prędkości punktu materialnego była równa $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.	**P**	**F**

Zadanie 19.

Model samochodu zabawki porusza się wzdłuż osi x. Na wykresie przedstawiono zależność współrzędnej prędkości modelu od czasu $v_x(t)$.



Zadanie 19.1 (0–2)

Oblicz współrzędną przyspieszenia a_x modelu w chwilach $t_1 = 1$ s i $t_2 = 3$ s.

Zadanie 19.2 (0–2)

Wyznacz czas, w którym prędkość od wartości maksymalnej maleje do zera.

Oblicz drogę przebytą przez model w czasie ostatnich dwóch sekund ruchu.

Zadanie 20. (0–3)

Spadające swobodnie ciało przebyło ostatni metr drogi w czasie $\Delta t = 0{,}2$ s.

Ustal czas swobodnego spadku ciała.

Oblicz początkową wysokość h, z jakiej spadło ciało.

Zadanie 21.

Wskazówka sekundowa zegara ma długość $12\ \mathrm{cm}$ i obraca się w sposób ciągły wokół osi przechodzącej przez jeden z jej końców.

Zadanie 21.1 (0–1)

Oblicz wartość prędkości liniowej drugiego końca wskazówki sekundowej.

Skorzystaj ze wzoru na prędkość liniową w ruchu jednostajnym po okręgu.

Zadanie 21.2 (0–2)

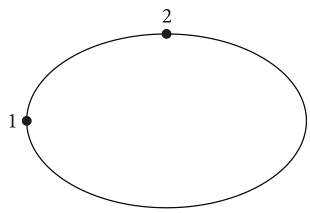
Oblicz drogę i przemieszczenie końca wskazówki w czasie 20 s.

Wykonaj pomocniczy rysunek.

Zadanie 22. (0–1)

Skuter porusza się ruchem jednostajnym po torze o kształcie elipsy.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.



Przyspieszenie dośrodkowe skutera jest:

A. cały czas równe zeru.

B. największe w punkcie 1.

C. największe w punkcie 2 .

D. różne od zera i takie samo w punktach 1 i 2.

Zastanów się, w którym punkcie promień krzywizny jest najmniejszy.

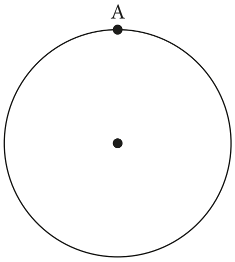
Zadanie 23. (0–4)

Piłka wyrzucona poziomo z punktu $\mathrm{P}_1(0,\ y_0)$ uderzyła o podłoże w punkcie $\mathrm{P}_2(10,0)$ z prędkością $\vec{v}$, której wektor tworzy z podłożem kąt $\alpha = 70°$. Współrzędne punktów P_1 i P_2 w układzie xy są wyrażone w metrach.

Oblicz y_0.

Zadanie 24.

Punkt materialny rusza z punktu A ruchem jednostajnie przyspieszonym i porusza się po okręgu zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Przyspieszenie liniowe punktu ma wartość a. Pierwsze pełne okrążenie punkt zakreśla w czasie T.



Zadanie 24.1 (0–1)

Zauważ, że w ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej drogi przebywane w kolejnych jednakowych odstępach czasu mają się do siebie jak kolejne liczby nieparzyste.

Na rysunku powyżej zaznacz punkt P, w którym punkt materialny był po czasie $t = \frac{1}{2}T$ od rozpoczęcia ruchu.

Zadanie 24.2 (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po czasie T stosunek wartości przyspieszenia dośrodkowego do liniowego jest równy:

A. π. **B.** 2π. **C.** 4π. **D.** $2\pi^2$.

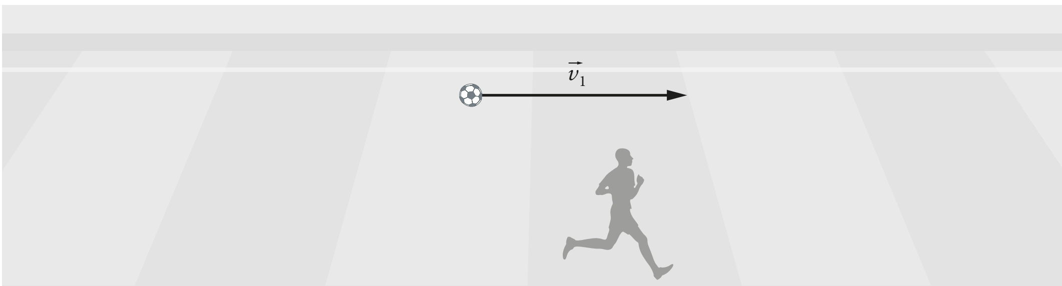
Zadanie 25. (0–3)

Piłka porusza się po boisku ze stałą prędkością $\vec{v}_1$ po linii prostej.

Wyznacz kierunek, w jakim powinien biec piłkarz chcący przechwycić tę piłkę. Maksymalna wartość prędkości piłkarza wynosi v_2. Poniższy rysunek ma charakter jedynie poglądowy. **Potraktuj piłkę i piłkarza jako punkty materialne i rozwiąż zadanie graficznie w układzie odniesienia związanym z piłką.**

Sprawdź w Vademecum *Układ inercjalny i nieinercjalny*, s. 64

Sprawdź w Vademecum *Odejmowanie wektorów o różnych kierunkach*, s. 473



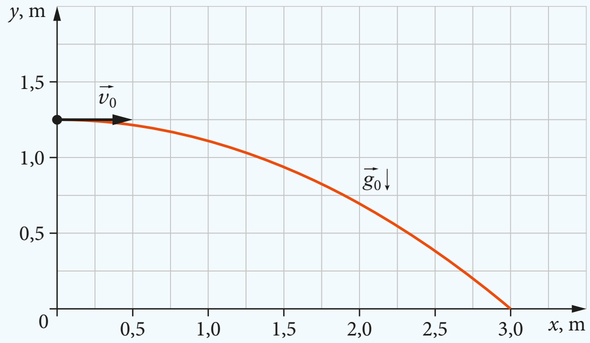
Rozwiąż

app.nowa terazmatura.pl
Kod: M577NP
Dodatkowe zadania

JEST NA TO SPOSÓB

1. Jak na podstawie toru ruchu ciała w rzucie poziomym wyznaczyć jego prędkość początkową

Na podstawie wykresu przedstawiającego tor ruchu ciała w rzucie poziomym oblicz wartość prędkości początkowej v_0, z jaką wyrzucono to ciało z wysokości h. Pomiń opory ruchu. Przyjmij przybliżoną wartość przyspieszenia ziemskiego $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



W rzucie poziomym wektor prędkości $\vec{v}_0$ jest prostopadły do wektora przyspieszenia $\vec{g}$.

PRZEANALIZUJ ROZWIĄZANIE KROK PO KROKU

Krok 1. Zauważmy, że rzut poziomy jest złożeniem dwóch ruchów.

W omawianym rzucie ciało porusza się w kierunku poziomym ruchem jednostajnym, a w kierunku pionowym – ruchem jednostajnie przyspieszonym. W każdej chwili t współrzędne położenia ciała, które traktujemy jako punkt, są opisane wzorami:

$$x = x_0 + v_0 t \qquad y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

Współrzędne położenia (x, y) ciała w rzucie poziomym po czasie t.

Krok 2. Uwzględniamy warunki zadania przedstawione na wykresie.

Odczytujemy z wykresu położenie początkowe ($x_0 = 0$ i $y_0 = h$) oraz położenie końcowe ($x = z$ i $y = 0$). Otrzymujemy:

$$z = v_0 t \quad (1) \qquad h = \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

gdzie: z – zasięg rzutu (zmiana położenia w kierunku poziomym), t – czas spadania z wysokości h.

Krok 3. Wyznaczamy prędkość początkową v_0.

Składowa prędkości w kierunku poziomym nie ulega zmianie, ponieważ zgodnie z treścią zadania w tym kierunku nie działają żadne siły. Zatem poziomo ciało porusza się cały czas z prędkością v_0.

Przekształcamy wzór (2) i podstawiamy otrzymaną zależność do wzoru (1):

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

$$z = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Z otrzymanego wzoru wyznaczamy prędkość początkową v_0:

$$v_0 = z\sqrt{\frac{g}{2h}} = 3\ \text{m} \cdot \sqrt{\frac{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \cdot 1{,}25\ \text{m}}} = 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Sprawdź, czy umiesz

1. Jakie wielkości fizyczne można wyznaczyć na podstawie analizy wykresu ilustrującego tor ruchu dla rzutu poziomego?
2. Czy tor ruchu ciała rzuconego poziomo na Księżycu z takiej samej wysokości z prędkością o takiej samej wartości różniłby się od toru przedstawionego na wykresie czy byłby taki sam?
3. Co można powiedzieć o prędkości początkowej ciała, które rzucone poziomo z wysokości cztery razy mniejszej, uzyskało taki sam zasięg jak ciało opisane powyżej?
4. Oszacuj na podstawie przedstawionego wykresu, gdzie najdalej od miejsca rzutu mogłaby stać ściana o wysokości $75\ \text{cm}$, aby rzucone ciało nad nią przeleciało?

app.nowa terazmatura.pl
Kod: AXXYGM
Sprawdź odpowiedzi

2. Jak przekształcać wzory zależności prędkości i drogi od czasu w ruchu jednostajnie zmiennym

Samochód podczas awaryjnego hamowania poruszał się z przyspieszeniem o wartości $7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ i zmniejszył prędkość do $10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ na drodze $23\ \mathrm{m}$. Jaka była prędkość samochodu w chwili rozpoczęcia hamowania? Przyjmij, że samochód podczas hamowania poruszał się po linii prostej. Wynik przedstaw z dokładnością do trzech cyfr znaczących.

PRZEANALIZUJ ROZWIĄZANIE KROK PO KROKU

Krok 1. **Odczytujemy z karty wzorów CKE wzory opisujące ruch jednostajnie zmienny:**

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \qquad (1)$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (2)$$

Przyspieszenie to wielkość fizyczna określająca, o jaką wartość zmienia się (rośnie lub maleje) prędkość danego ciała w jednostce czasu. Znak minus we wzorach oznacza, że prędkość będzie malała o tę samą wartość w każdej jednostce czasu.

Krok 2. **Zapisujemy wzory z uwzględnieniem, że ruch jest jednostajnie opóźniony i odbywa się po linii prostej:**

$$v = v_0 - at$$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$$

gdzie: v – końcowa prędkość samochodu, v_0 – początkowa prędkość samochodu, której szukamy, a – wartość przyspieszenia samochodu, t – czas hamowania. Zauważmy, że nie mamy podanego czasu hamowania.

Krok 3. **Rozwiązujemy układ równań, gdzie niewiadomą jest prędkość v_0:**

$$\begin{cases} v = v_0 - at \\ s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

Z pierwszego wzoru wyznaczamy czas:

$$t = \frac{v_0 - v}{a}$$

i wstawiamy do wzoru na drogę:

$$s = v_0 \cdot \left(\frac{v_0 - v}{a}\right) - \frac{1}{2}a\left(\frac{v_0 - v}{a}\right)^2$$

Krok 4. **Przekształcamy powyższy wzór i wyznaczamy v_0.**

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy i dostajemy:

$$s = \left(\frac{v_0^2 - v_0 v}{a}\right) - \frac{1}{2}a\left(\frac{v_0^2 - 2v_0 v + v^2}{a^2}\right)$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$s = \frac{v_0^2 - v^2}{2a}$$

Wyznaczamy prędkość początkową v_0:

$$v_0 = \sqrt{2as + v^2}$$

i podstawiamy dane z zadania:

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 23\ \mathrm{m} + \left(10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 20{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Sprawdź, czy umiesz

1. Wyraź prędkość końcową w ruchu jednostajnie przyspieszonym poprzez prędkość początkową, przebytą drogę i przyspieszenie.
2. Czy za pomocą metody omawianej w punkcie 1. można obliczyć prędkość, z jaką piłka rzucona pionowo w dół z wysokości $1\ \mathrm{m}$ uderzy w podłogę? Jakie trzeba przyjąć założenia?
3. Jaką postać przyjmie wzór na drogę przebytą przez hamujący pojazd do momentu jego zatrzymania się, jeżeli znamy prędkość początkową oraz wartość opóźnienia?
4. Sprawdź, czy potrafisz wyprowadzić wzór na przebytą drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym, jeżeli znasz tylko prędkości początkową i końcową oraz czas ruchu.

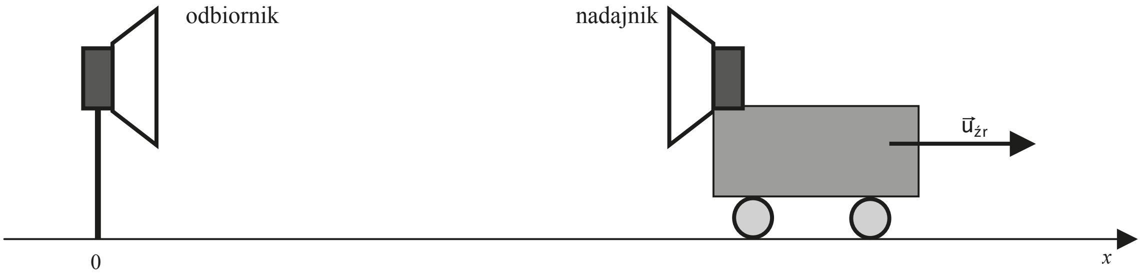
app.nowa
terazmatura.pl
Kod: MGPG5G
Sprawdź odpowiedzi

Zadania CKE

Zadanie 1. Wózek

CKE 2005 (Formuła 2005) MAJ, Zad. 3.

Wózek z nadajnikiem fal ultradźwiękowych, spoczywający w chwili $t = 0$, zaczyna oddalać się od nieruchomego odbiornika ruchem jednostajnie przyspieszonym.



Zadanie 1.1 (0–3)

Narysuj wykres zależności $u_{źr}^2$ od $2x$, obliczając i uzupełniając brakujące wartości w tabeli.

f, Hz	1 000 000	998 789	997 582	996 377	995 175	993 976
x, m	0	0,1	0,4	0,9	1,6	2,5
$2x$, m						
$u_{źr}$, $\frac{m}{s}$	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0
$u_{źr}^2$, $\frac{m}{s^2}$						

Zadanie 1.2 (0–2)

Wyprowadź zależność matematyczną pozwalającą obliczyć wartość przyspieszenia wózka.

Przyjmij, że dane są tylko położenie x i prędkość $u_{źr}$ wózka.

app.nowaterazmatura.pl
Kod KSNMMG
Rozwiązania zadań CKE 1.–10.

Zadanie często na maturze

Potrzebne pojęcia, prawa i zasady
opisanie i wyskalowanie osi, naniesienie punktów, narysowanie wykresu

Potrzebne pojęcia, prawa i zasady
położenie, prędkość, przyspieszenie

Obejrzyj film

app.nowaterazmatura.pl
Kod: K56RL6
Tutorial: **Rozwiązanie zadania 2.**

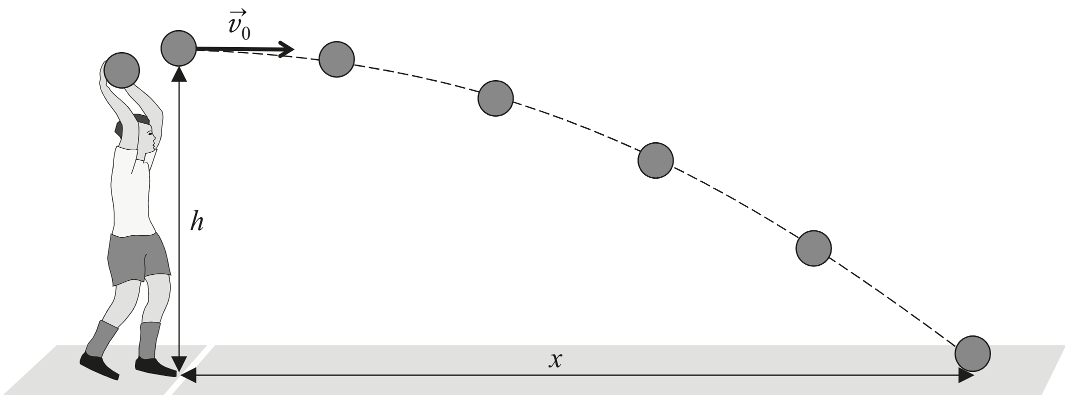
Zadanie często na maturze

Zadanie 2.

CKE 2019 (Formuła 2015) MAJ, Zad. 1.

Rzut z autu jest elementem gry w piłkę nożną i polega na wprowadzeniu piłki do gry z linii bocznej boiska. Podczas wykonywania autu piłkarz rzuca piłkę oburącz zza głowy.

W zadaniach 2.1–2.4 pomiń opory ruchu oraz przyjmij, że prędkość początkowa $\vec{v}_0$ piłki rzuconej z autu ma kierunek poziomy, a przyspieszenie ziemskie ma wartość $g = 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Rysunek poniżej przedstawia położenia piłki podczas ruchu w jednakowych odstępach czasu.



Zadanie 2.1 (0–2)

Potrzebne pojęcia, prawa i zasady
ruch ciał w dwóch wymiarach: spadek swobodny i ruch jednostajny prostoliniowy

Zawodnik podczas meczu wyrzuca piłkę z autu w kierunku poziomym. W momencie wyrzutu piłka znajduje się na wysokości $h = 1{,}96$ m ponad poziomą powierzchnią boiska.

Oblicz czas lotu piłki od momentu wyrzutu do chwili uderzenia piłki o ziemię.

Zadanie 2.2 (0–2)

Potrzebne pojęcia, prawa i zasady
kinematyczne równania spadku swobodnego

Piłka wyrzucona poziomo z autu, z wysokości $h = 1{,}96\ \text{m}$, spadła na boisko w odległości $x = 5{,}10\ \text{m}$ – jeśli zmierzyć w kierunku poziomym od miejsca wyrzutu (zobacz rys. powyżej).

Oblicz wartość v_0 prędkości początkowej piłki.

Zadanie 2.3 (0–1)

Potrzebne pojęcia, prawa i zasady
ruch ciała w dwóch wymiarach

Piłkę P_1 rzucono poziomo (jak w opisie zadania 2.), a piłkę P_2 (taką samą jak P_1) upuszczono swobodnie z tej samej wysokości. Czas lotu piłki P_1 do momentu uderzenia w ziemię oznaczymy jako t_1, a wartość prędkości tej piłki tuż przed uderzeniem w ziemię oznaczymy jako v_1. Analogicznie – czas lotu piłki P_2 do momentu uderzenia w ziemię oznaczymy jako t_2, a wartość prędkości tej piłki tuż przed uderzeniem w ziemię oznaczymy jako v_2.

Uzupełnij zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź wybraną spośród A–C oraz wybraną spośród 1–3.

Odpowiedzi udzielaj zgodnie z modelem zjawiska, w którym pomijamy opory powietrza.

Zależność między czasami lotu obu piłek określa relacja | A | B | C |, a zależność między wartościami prędkości piłek tuż przed uderzeniem w ziemię określa relacja | 1 | 2 | 3 |.

A. $t_1 = t_2$ **1.** $v_1 = v_2$

B. $t_1 > t_2$ **2.** $v_1 > v_2$

C. $t_1 < t_2$ **3.** $v_1 < v_2$

Zadanie 3.

CKE 2020 (Formuła 2015) MAJ, Zad. 1.

Zadanie często na maturze

Hokeista uderzył kijem w nieruchomy krążek. Po uderzeniu krążek uzyskał poziomą prędkość początkową o wartości $v_1 = 14\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Dalej krążek poruszał się po powierzchni lodu ruchem jednostajnie opóźnionym prostoliniowym. Od momentu uzyskania prędkości $\vec{v}_1$ po uderzeniu aż do chwili zatrzymania się krążek przebył drogę $s_1 = 28\ \text{m}$.

W zadaniach 3.1–3.3 przyjmij, że siła tarcia kinetycznego działająca na krążek poruszający się po lodzie ma stałą wartość, proporcjonalną do wartości ciężaru krążka. Pomiń inne siły działające na krążek w kierunku poziomym.

Zadanie 3.1 (0–2)

Oblicz czas ruchu krążka od momentu uzyskania prędkości $\vec{v}_1$ aż do zatrzymania się.

Potrzebne pojęcia, prawa i zasady

równania na prędkość i drogę dla ruchu jednostajnie opóźnionego (z prędkością końcową równą zero)

Zadanie 3.2 (0–2)

Hokeista ponownie uderzył kijem w ten sam nieruchomy krążek. Po tym uderzeniu krążek uzyskał poziomą prędkość początkową o wartości v_2 dwukrotnie mniejszej od v_1.

Oblicz drogę, jaką przebył krążek od momentu uzyskania prędkości $\vec{v}_2$ aż do chwili zatrzymania się.

Potrzebne pojęcia, prawa i zasady

droga w ruchu jednostajnie opóźnionym do zatrzymania

Zadanie 4.

CKE 2016 (Formuła 2015) MAJ, Zad. 1.

Zadanie często na maturze

Wózek poruszał się bez tarcia (np. na torze powietrznym) po poziomej prostej (osi x) i odbił się od nieruchomej przeszkody. Zarejestrowano kolejne położenia wózka w odstępach co $0{,}1\ \text{s}$, a wyniki przedstawiono w poniższej tabeli. Dokładność pomiarów położenia wynosiła $5\ \text{cm}$.

t, s	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
x, cm	15	40	70	95	125	120	100	80	60

Potrzebne pojęcia, prawa i zasady

opisanie i wyskalowanie osi, naniesienie punktów wraz z niepewnościami

Zadanie 4.1 (0–5)

a) Wykonaj wykres zależności $x(t)$ i zaznacz na wykresie niepewności x. Pomiary czasu przyjmij za dokładne.

b) Na podstawie wykresu ustal czas odbicia (z dokładnością do $0{,}02\ \mathrm{s}$) i położenie wózka w tej chwili (z dokładnością do $5\ \mathrm{cm}$).

Zadanie 4.2 (0–1)

Czy odbicie było doskonale sprężyste?

Napisz i uzasadnij odpowiedź.

Zadanie często na maturze

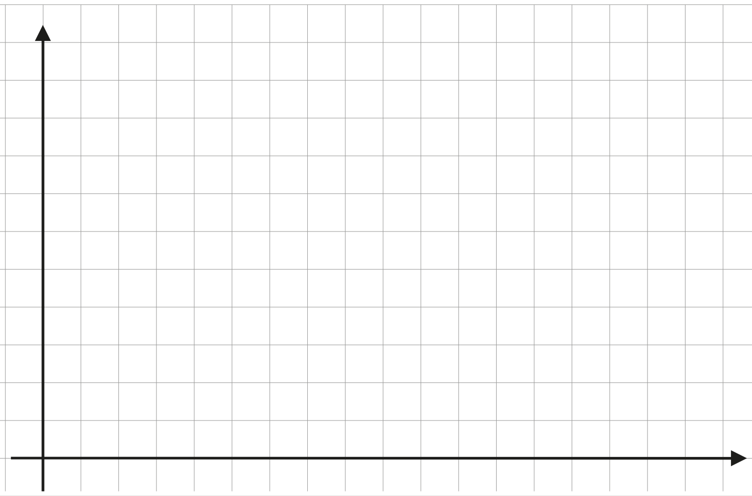
Zadanie 5.

CKE 2018 (Formuła 2015) MAJ, Zad. 1.

Rozważamy ruch dwóch samochodów, które poruszały się po poziomym i prostym odcinku trasy. Pierwszy samochód ruszył i jadąc ze stałym przyspieszeniem, rozpędził się w czasie $2\ \mathrm{s}$ do prędkości o wartości $10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Następnie przez $6\ \mathrm{s}$ jechał ze stałą prędkością, a potem przez $2\ \mathrm{s}$ hamował ze stałym opóźnieniem aż do zatrzymania się. Drugi samochód ruszył równocześnie z pierwszym. Przez pierwszą połowę czasu trwania ruchu rozpędzał się ze stałym przyspieszeniem, a potem hamował ze stałym opóźnieniem aż do zatrzymania się. Oba samochody przebyły tę samą drogę w tym samym czasie.

Zadanie 5.1 (0–2)

Narysuj wykres zależności $v(t)$ – wartości prędkości od czasu – dla ruchu pierwszego samochodu.



Potrzebne pojęcia, prawa i zasady

prawidłowe zorientowanie osi, opisanie ich i wyskalowanie

Zadanie 5.2 (0–3)

Oblicz całkowitą drogę przebytą przez pierwszy samochód oraz maksymalną wartość prędkości drugiego samochodu.

Potrzebne pojęcia, prawa i zasady

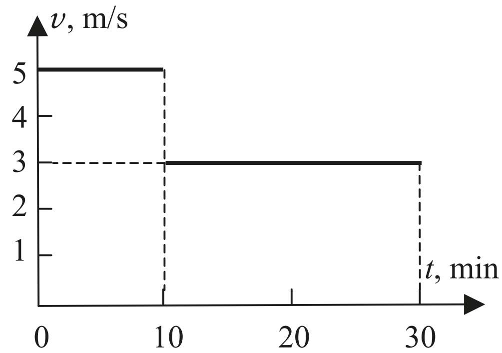
pole pod wykresem wartości prędkości od czasu jest równe drodze przebytej przez ciało w danym czasie (przy odpowiednio wyskalowanych osiach)

Zadanie 6. Motorówka

CKE 2013 (Formuła 2005) MAJ, Zad. 1.

Zadanie, które było najtrudniejsze

Na wykresie przedstawiono zależność wartości prędkości motorówki względem brzegu od czasu. Motorówka pływała wzdłuż prostoliniowego brzegu rzeki z prądem i pod prąd. Przez cały czas silnik motorówki pracował z pełną mocą i wartość prędkości motorówki względem wody była stała. Prędkość wody w rzece także była stała i mniejsza od prędkości motorówki względem wody.



Zadanie 6.1 (0–2)

Oblicz drogę, jaką przebyła motorówka w czasie 30 minut ruchu.

Zadanie 6.2 (0–2)

Oblicz wartość prędkości motorówki względem wody.

Potrzebne pojęcia, prawa i zasady

wykres liniowo rosnący, wykres liniowo malejący

Zadanie 6.3 (0–3)

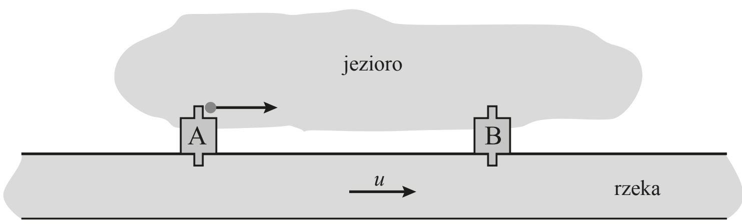
Narysuj wykres zależności położenia x motorówki od czasu t. Przyjmij, że oś x jest zwrócona zgodnie z nurtem rzeki, a ruch rozpoczyna się w punkcie $x_0 = 0$.

Potrzebne pojęcia, prawa i zasady

prędkość motorówki płynącej z prądem i prędkość motorówki płynącej pod prąd

Zadanie 6.4 (0–2)

Z przystani A wyruszają jednocześnie z jednakową i stałą prędkością v względem wody dwie motorówki. Jedna płynie po jeziorze, a druga – po rzece płynącej z A do B z prędkością u względem brzegu. Po dopłynięciu do przystani B motorówki zawracają.



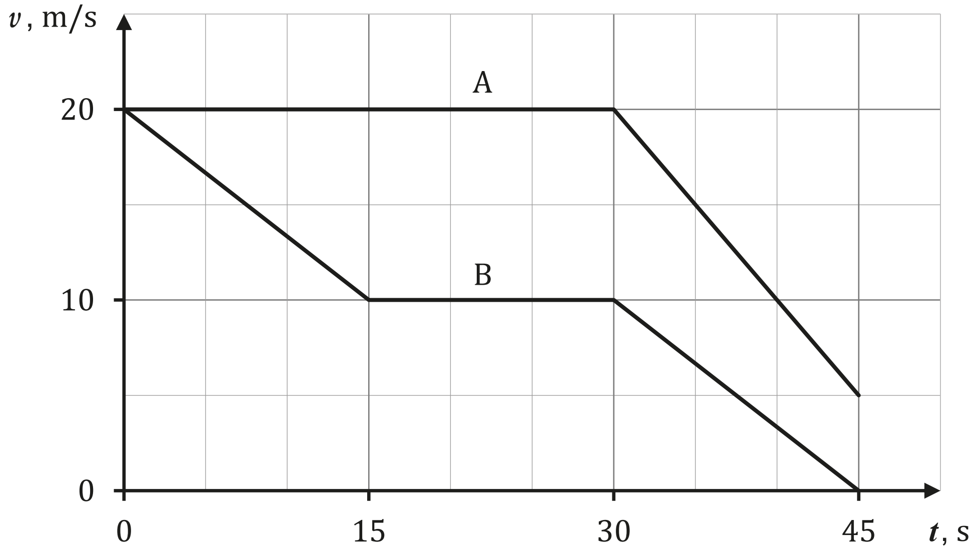
Ustal, która motorówka wcześniej powróci do przystani A. Odpowiedź uzasadnij, zapisując odpowiednie zależności.

Zadanie 7.

CKE 2022 (Formuła 2015) MAJ, Zad. 1.

Zadanie często na maturze

Ciała A i B poruszały się w układzie inercjalnym w tę samą stronę, wzdłuż linii prostych równoległych. Na poniższym diagramie przedstawiono dla każdego z ciał A i B wykresy zależności wartości v prędkości tych ciał od czasu t, od chwili $t = 0$ do chwili $t = 45$ s. W chwili $t = 0$ ciała A i B znajdowały się obok siebie. Przyjmij, że odległość między torami ruchów obu ciał jest tak mała, że można ją pominąć.



Zadanie 7.1 (0–1)

Potrzebne pojęcia, prawa i zasady: prędkości względne dla ruchów wzdłuż prostej

Dokończ zdanie. Wpisz właściwą liczbę w wykropkowanym miejscu.

Prędkość względna ciał A i B w chwili $t = 25$ s ma wartość .... $\frac{m}{s}$.

Zadanie 7.2 (0–3)

Potrzebne pojęcia, prawa i zasady: związki pomiędzy położeniem, prędkością i przyspieszeniem w ruchu jednostajnym i jednostajnie zmiennym

Oblicz odległość pomiędzy ciałami A i B w chwili $t = 45$ s.

Przyjmij, że w chwili $t = 0$ odległość pomiędzy ciałami A i B była równa 0.

Zadanie 8. Dwa pociągi (0–3)

CKE 2013 (Formuła 2005) MAJ, Zad. 11.

Zadanie często na maturze

Potrzebne pojęcia, prawa i zasady: wartość prędkości względnej

Pociąg o długości 260 m, jadący z prędkością 30 m/s, mija się z pociągiem o długości 180 m, jadącym w przeciwną stronę. Czas mijania pociągów, liczony od momentu minięcia się ich przodów do momentu minięcia się ich końców, wynosił 8,3 s. **Oblicz prędkość drugiego pociągu.**

Więcej arkuszy pod kodami QR, patrz s. 4

Arkusz 1

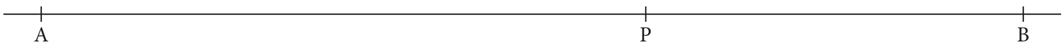
Zadanie 1. (0–2) Samochód

Po pierwszym etapie podróży komputer w samochodzie obliczył średnią wartość prędkości na tym odcinku, równą $v_1 = 84\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Po kolejnych $30\ \mathrm{km}$, jakie pojazd przejechał w czasie 15 minut, podróż została zakończona, a komputer wskazał średnią wartość prędkości na całej trasie, równą $v_2 = 104\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Oblicz czas trwania całej podróży.

Zadanie 2. (0–4) Przyspieszenie

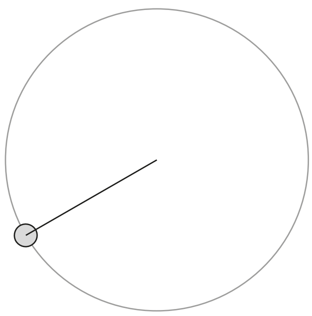
Ciało przebyło ze stałym przyspieszeniem prostoliniowy odcinek AB o długości $13\ \mathrm{m}$ w czasie dwóch sekund. W połowie czasu ruchu ciało było w punkcie P.



Wykonaj konieczne pomiary i oblicz wartość prędkości początkowej ciała w punkcie A.

Zadanie 3. (0–3) Krążek

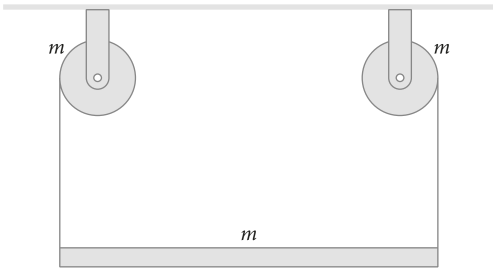
Ruch krążka o masie $m = 0{,}1\ \mathrm{kg}$ badano na stoliku powietrznym, co pozwoliło praktycznie wyeliminować siłę tarcia. Powierzchnia stolika była wypoziomowana. Do środka krążka zamocowano cienką gumkę, a jej drugi koniec przytwierdzono w środku okręgu, po którym krążek się poruszał . Współczynnik sprężystości gumki wynosił $k = 20\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$, a jej swobodna długość $x_0 = 20\ \mathrm{cm}$. W czasie ruchu gumka rozciągnęła się o x, do długości $l = x_0 + x$. Rysunek przedstawia widok z góry na stolik, po którym poruszał się krążek.



Oblicz okres obiegu krążka, gdy poruszał się on z prędkością liniową $v = 4\ \frac{m}{s}$.

Zadanie 4. Belka

Belka o masie m jest zawieszona na cienkich linkach nawiniętych na dwa jednakowe walce o masie m i promieniu r każdy. Moment bezwładności walca względem jego osi symetrii wynosi $I = \frac{1}{2} mr^2$. Belka podczas ruchu pozostaje pozioma, pomijamy opory ruchu układu.



Zadanie 4.1 (0–3)

Skorzystaj z zasad dynamiki ruchu postępowego oraz ruchu obrotowego i wyznacz wartość przyspieszenia a belki w zależności tylko od wartości przyspieszenia ziemskiego g.

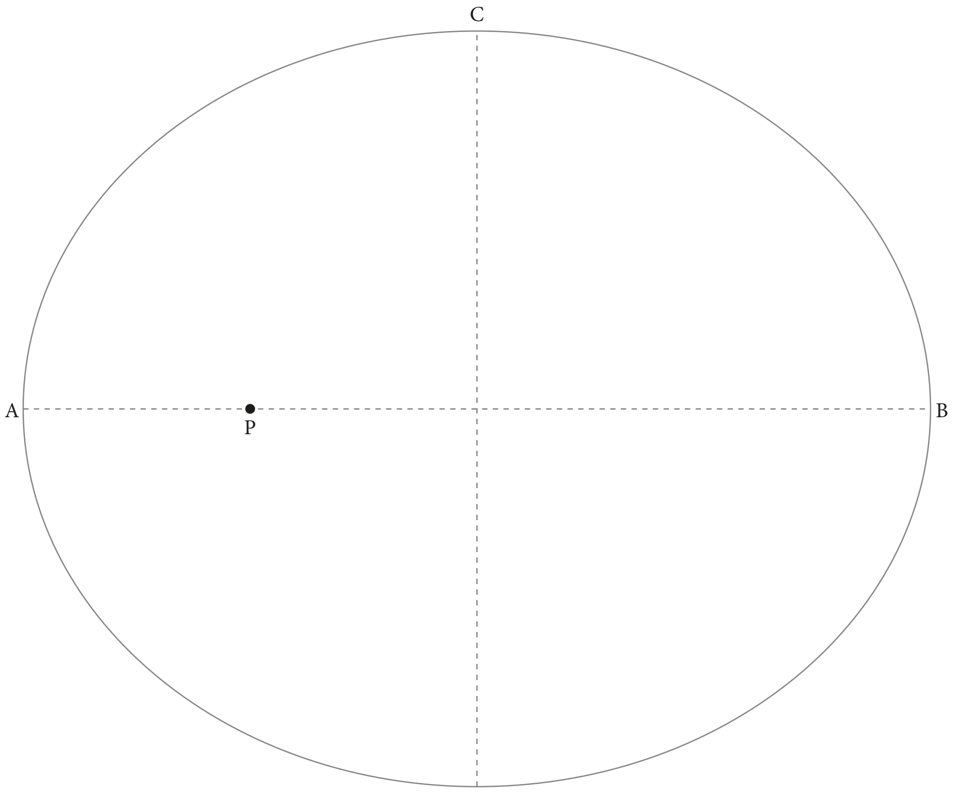
Zadanie 4.2 (0–2)

W pewnej chwili t energia potencjalna belki była mniejsza o 60 J od jej początkowej energii potencjalnej, gdy ciało spoczywało.

Oblicz energię kinetyczną belki w chwili t.

Zadanie 5. Orbita

Satelita porusza się wokół planety P po orbicie eliptycznej, która w skali jest przedstawiona na rysunku poniżej. Liniami przerywanymi narysowano wielką oś i małą oś elipsy.



Zadanie 5.1 (0–2)

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

1.	W punkcie A przyspieszenie liniowe satelity jest największe.	P	F
2.	W punkcie B przyspieszenie dośrodkowe satelity ma mniejszą wartość niż w punkcie A.	P	F
3.	W punkcie C przyspieszenie liniowe satelity ma taką samą wartość jak przyspieszenie dośrodkowe.	P	F

Zadanie 5.2 (0–2)

Zaznacz na elipsie punkt D, w którym siła grawitacji działająca na satelitę ma dwa razy mniejszą wartość niż w punkcie A.

Zadanie 5.3 (0–4)

Wykonaj konieczne pomiary na rysunku przedstawiającym orbitę i oblicz wartości stosunków dla różnych rodzajów energii satelity w punktach A i B orbity. Wyniki obliczeń zapisz poniżej.

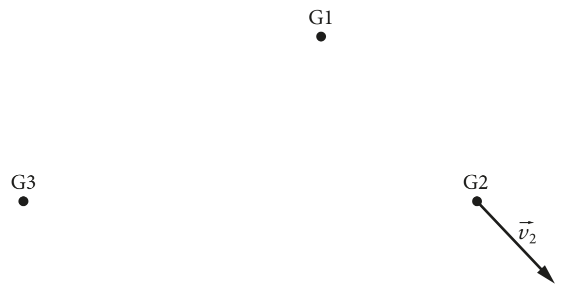
Energia całkowita $\frac{E_A}{E_B} =$.................. .

Energia kinetyczna $\frac{E_{kA}}{E_{kB}} =$.................. .

Energia potencjalna $\frac{|E_{pA}|}{|E_{pB}|} =$.................. .

Zadanie 6. (0–2) Hubble

Na rysunku poniżej zaznaczono trzy galaktyki G1, G2, G3. Odległość pomiędzy galaktykami G1 i G2 jest równa ok. 10 Mpc. Wektor $\vec{v}_2$ przedstawia prędkość, z jaką galaktyka G2 oddala się od galaktyki G1.

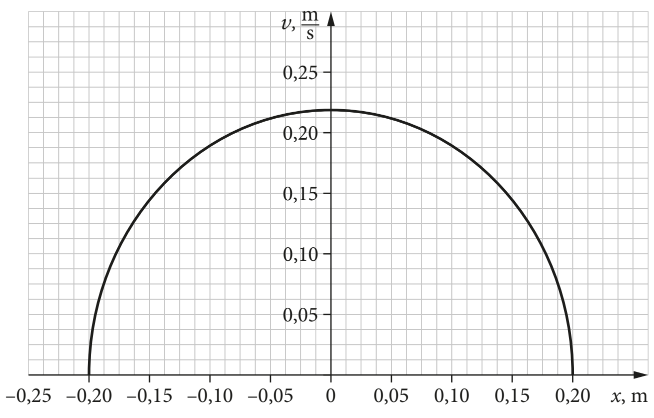


Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

1.	Galaktyka G2 oddala się od galaktyki G1 z prędkością ok. $700\ \frac{km}{s}$.	P	F
2.	Galaktyka G3 oddala się od galaktyki G1 z prędkością $v_3 \approx 1{,}5 v_2$.	P	F
3.	Galaktyka G1 nie oddala się od galaktyk G2 i G3.	P	F

Zadanie 7. Wahadło

Na wykresie przedstawiono zależność prędkości od wychylenia dla wahadła o długości l, które można traktować jako wahadło matematyczne.



Zadanie 7.1 (0–1)

Wyprowadź wzór przedstawiający zależność $v(x)$, gdy dana jest amplituda A i okres T.

Zadanie 7.2 (0–2)

Oblicz długość wahadła l.

Zadanie 7.3 (0–1)

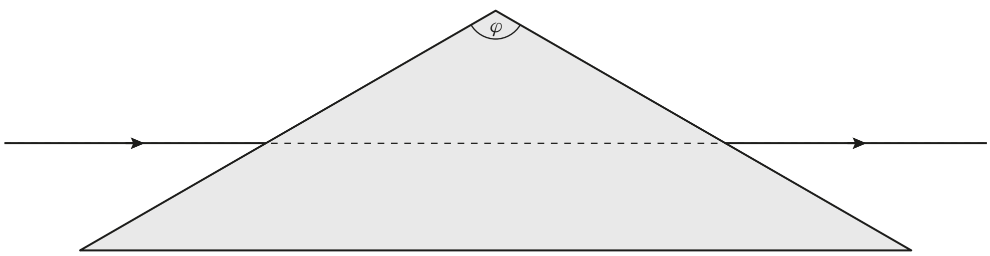
Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Aby wahadło matematyczne o masie m i długości l pozostawało w rezonansie z drgającą sprężyną, na której zawieszono ciało o masie m, współczynnik sprężystości sprężyny k musi być równy:

A. $k = \frac{l}{mg}$ B. $k = \frac{mg}{l}$ C. $k = \frac{m}{gl}$ D. $k = \frac{g}{ml}$

Zadanie 8. Pryzmat

Przekrój pryzmatu wykonanego ze szkła o współczynniku załamania $n = 1{,}5$ jest trójkątem równoramiennym o kącie rozwartym $\varphi = 120°$. Promień światła lasera skierowano na ścianę boczną w płaszczyźnie przekroju i równolegle do podstawy pryzmatu, tak jak pokazano na rysunku. Po przejściu przez pryzmat promień biegnie wzdłuż tej samej prostej co promień padający na pryzmat.



Zadanie 8.1 (0–1)

Na rysunku powyżej narysuj bieg promienia wewnątrz pryzmatu.

Zadanie 8.2 (0–1)

Zapisz nazwę zjawiska, któremu ulega światło padające na podstawę pryzmatu.

....

Zadanie 8.3 (0–2)

Oblicz kąt załamania światła na ścianie bocznej pryzmatu.

Zadanie 9. Proton

Proton wpada z prędkością $v_0 = 3 \cdot 10^5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ w jednorodne pole elektryczne i poruszając się w nim wzdłuż linii pola, przebywa odległość $d_{\mathrm{AB}} = 5\ \mathrm{cm}$. Napięcie między punktami wejścia i wyjścia z pola jest równe $U_{\mathrm{AB}} = 500\ \mathrm{V}$.

Zadanie 9.1 (0–1)

Zaznacz właściwe dokończenie zdania spośród A–C oraz spośród 1–3.

Zwiększenie odległości d_{AB} bez zmiany napięcia U_{AB} spowoduje, że przyspieszenie protonu

A.	zmaleje,	a wartość prędkości protonu w punkcie wyjścia z pola będzie	**1.**	mniejsza.
B.	nie zmieni się,		**2.**	taka sama.
C.	wzrośnie,		**3.**	większa.

Zadanie 9.2 (0–3)

Wyprowadź wzór na prędkość protonu w punkcie wyjścia z pola elektrycznego i oblicz jej wartość.

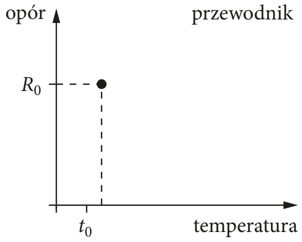
Zadanie 10. (0–3) Obwód

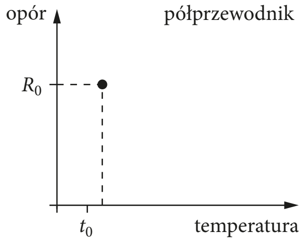
W obwód z ogniwem o SEM $\mathcal{E} = 1{,}5\ \mathrm{V}$ i oporze wewnętrznym włączono opornik o oporze $R = 10\ \Omega$ i amperomierz, który wskazał $I_1 = 80\ \mathrm{mA}$. Gdy do ogniwa dołączono szeregowo drugie takie samo ogniwo, to amperomierz wskazał $I_2 = 150\ \mathrm{mA}$.

Oblicz opór amperomierza R_{A}.

Zadanie 11. (0–2) Opór

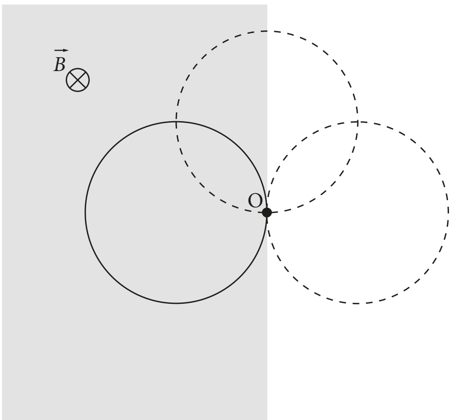
Naszkicuj na poniższych rysunkach wykresy zależności oporu elektrycznego przewodnika i półprzewodnika od temperatury t dla $t > t_0$.



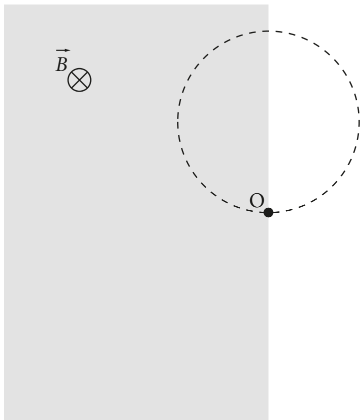


Zadanie 12. Indukcja

Pojedynczy zwój o promieniu $r = 10$ cm obraca się zgodnie z ruchem wskazówek zegara wokół osi O, prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Prędkość kątowa obrotu jest równa $\omega = \pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.
W chwili początkowej zwój znajduje się w całości w polu magnetycznym o indukcji $B = 0{,}8$ T. Pole jest prostopadłe do powierzchni zwoju i znajduje się w obszarze zaznaczonym na szaro.



Rysunek 1.



Rysunek 2.

Zadanie 12.1 (0–1)

Zaznacz na rysunku 2. kierunek przepływu prądu indukcyjnego w zwoju.

Zadanie 12.2 (0–2)

Oblicz średnią SEM indukcji w czasie, gdy zwój wykonał połowę obrotu wokół osi O.

Zadanie 12.3 (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Bezwzględna wartość SEM indukcji podczas obrotu zwoju:

A. cały czas rośnie.

B. cały czas maleje.

C. najpierw rośnie, potem maleje.

D. jest równa średniej wartości SEM.

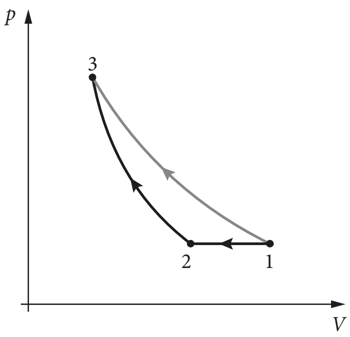
Zadanie 13. Gaz

Gaz dwuatomowy, dla którego $C_V = \frac{5}{2}R$, sprężano od stanu 1 do stanu 3 na dwa sposoby.

a) Bezpośrednio $1 \to 3$ izotermicznie.

b) Poprzez stan 2, najpierw $1 \to 2$ izobarycznie, następnie $2 \to 3$ adiabatycznie.

Szkic wykresu $p(V)$ dla opisanych przemian przedstawiono poniżej, a wartości wybranych parametrów gazu w tabeli obok wykresu.



	p, hPa	V, dm^3
1.	1000	5
2.	1000	–
3.	2500	2

Zadanie 13.1 (0–3)

Przyjmijmy oznaczenia: ΔU – zmiana energii wewnętrznej gazu, W – praca siły zewnętrznej, $|Q|$ – bezwzględna wartość ciepła wymienionego przez gaz z otoczeniem.

Określ relacje pomiędzy podanymi wielkościami – wpisz w każde wykropkowane miejsce odpowiedni znak wybrany spośród: >, =, <.

$\Delta U_{(1\to 3)} \ \ldots \ \Delta U_{(1\to 2\to 3)}$ $\qquad W_{(1\to 3)} \ \ldots \ W_{(1\to 2\to 3)}$ $\qquad |Q_{(1\to 3)}| \ \ldots \ |Q_{(1\to 2\to 3)}|$

Zadanie 13.2 (0–4)

Oblicz ciepło oddane przez gaz w przemianie izobarycznej.

Wskazówka. Równanie przemiany adiabatycznej to $pV^k = \mathrm{const}$, gdzie $\kappa = \frac{C_p}{C_V}$.

app.nowa
terazmatura.pl
Kod: NTT43J
Rozwiązania zadań 1.–25.

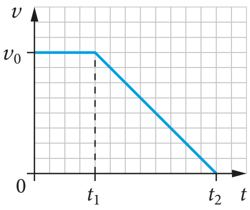
Odpowiedzi do zadań

1. Kinematyka

zadanie 1.1

$s = 48\ \mathrm{m}$

zadanie 1.2



zadanie 1.3

A1

zadanie 2.

$\Delta x = 0\ \mathrm{m},\ s = 8\ \mathrm{m}$

zadanie 3.

$n = \frac{t_1}{t_2 - t_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4} - \sqrt{2}} \approx 2{,}41$

zadanie 4.1

$v(t) = 2 - 0{,}2t$

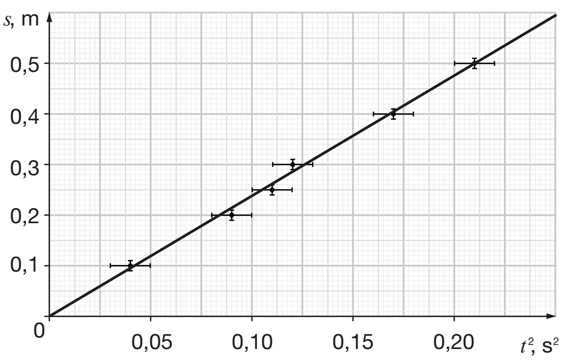
zadanie 4.2

$s = 20\ \mathrm{m}$

zadanie 4.3

$r = 0$

zadanie 5.1



zadanie 5.2

$a = 4{,}76\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

zadanie 6.1

$v_{wyp} = 40{,}2\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

zadanie 6.2

$\alpha \approx 26{,}6^\circ$

zadanie 6.3

A

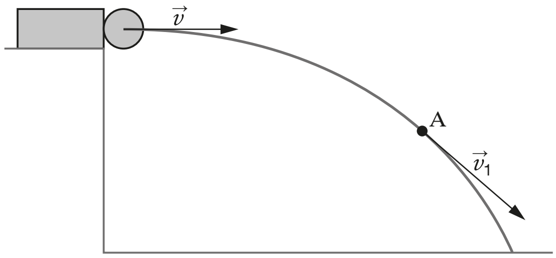
zadanie 7.

1. F, 2. P, 3. P

zadanie 8.

B

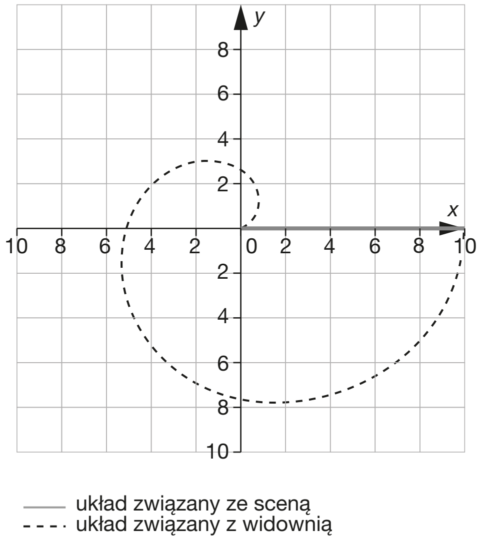
zadanie 9.1



zadanie 9.2

$s_c = \sqrt{s^2 + h^2} \approx 375\ \mathrm{m}$

zadanie 10.1



zadanie 10.2

$v = \frac{1}{6}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

zadanie 10.3

1. P, 2. F

zadanie 11.1

$a_d \approx 3{,}3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

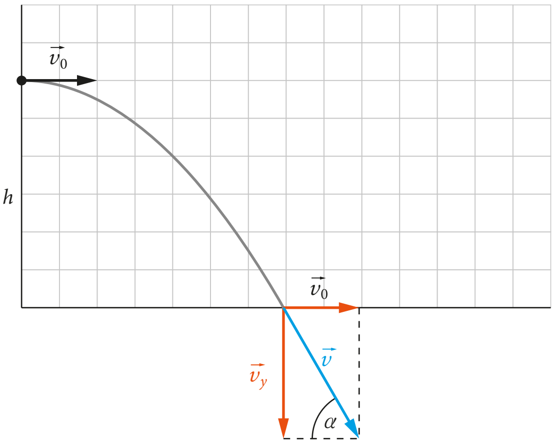
zadanie 11.2

B, 1

zadanie 12.

1. F, 2. P, 3. F

zadanie 13.1



zadanie 13.2

$h = \frac{v_0^2 \operatorname{tg}^2\alpha}{2g} \approx 34{,}4$ m

zadanie 13.3

$s = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 39{,}5$ m

zadanie 14.1

$s = v_0 t_R + v_0 t - \frac{1}{2}at^2 \approx 29$ m

zadanie 14.2

$v_0 \approx 16{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 60{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$

zadanie 15.1

$v_1 = v_2 \qquad \omega_1 < \omega_2$

zadanie 15.2

$n_2 = \frac{R_1}{R_2} n_1 \approx 93$ obroty

zadanie 16.

$s = 18$ m, $\Delta r \approx 10{,}8$ m

zadanie 17.

$v_3 = 172\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

zadanie 18.

1. F, 2. F, 3. P

zadanie 19.1

$a_{1x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$a_{2x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

zadanie 19.2

$s = s_1 + s_2 = 3{,}6\ \text{m} + 1{,}6\ \text{m} = 5{,}2\ \text{m}$

zadanie 20.

$h = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}61^2\ \text{s}^2 = 1{,}83$ m

zadanie 21.1

$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 12\ \text{cm}}{60\ \text{s}} \approx 1{,}3\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

zadanie 21.2

$|\overrightarrow{AB}| = 2R \sin 60^\circ = 2 \cdot 12\ \text{cm} \cdot \sin 60^\circ = 20{,}8\ \text{cm}$

zadanie 22.

B

zadanie 23.

$y_0 = \frac{1}{2}gt^2 = 13{,}7$ m

zadanie 24.1

$s_P = \frac{1}{2}a\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}s$

zadanie 24.2

$\frac{a_d}{a} = 4\pi$

zadanie 25.

Wskazówka. Rozwiąż to zadanie w układzie odniesienia związanym z piłką.

ZADANIA CKE

app.nowa terazmatura.pl
Kod: KSNMMG
Rozwiązania zadań CKE 1.–10.

zadanie 1.1

Wskazówka. Oblicz i uzupełnij brakujące wartości w tabeli.

zadanie 1.2

$a = \frac{u_{zr}^2}{2x}$

zadanie 2.1

$t_s \approx 0{,}63$ s

zadanie 2.2

$v_0 = x\sqrt{\frac{g}{2h}} \approx 8{,}1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

zadanie 2.3

A, 2

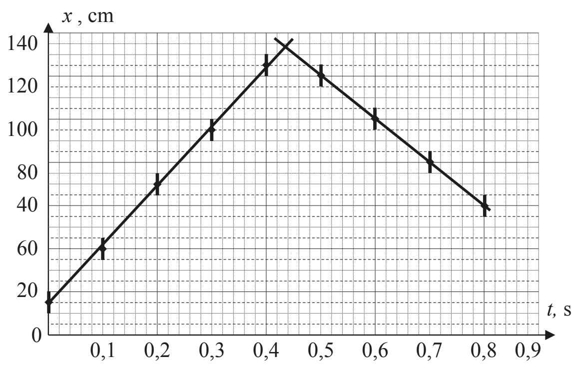
zadanie 3.1

$t_1 = \frac{2s_1}{v_1} = 4$ s

zadanie 3.2

$s_2 = \frac{1}{4}s_1 = 7$ m

zadanie 4.1 a)



b) Czas odbicia (od 0,40 s do 0,46 s), położenie wózka (od 125 do 140 cm)

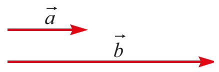
app.nowa
terazmatura.pl
Kod: ETTS27
Dodatek matematyczny

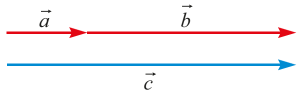
Dodatek matematyczny

1. Działanie na wektorach

DODAWANIE WEKTORÓW

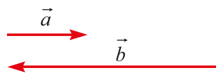
- o tym samym kierunku i zgodnych zwrotach

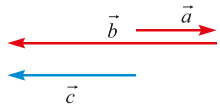




$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

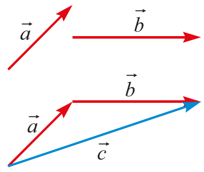
- o tym samym kierunku i przeciwnych zwrotach



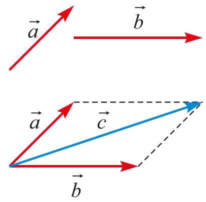


$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

- o różnych kierunkach



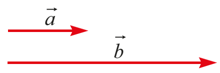
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

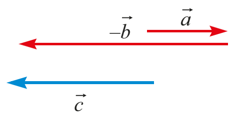


$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

ODEJMOWANIE WEKTORÓW

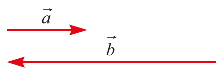
- o tym samym kierunku i zgodnych zwrotach

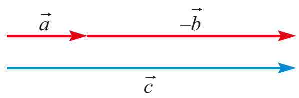




$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

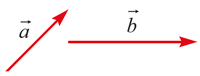
- o tym samym kierunku i przeciwnych zwrotach

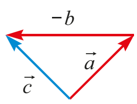




$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

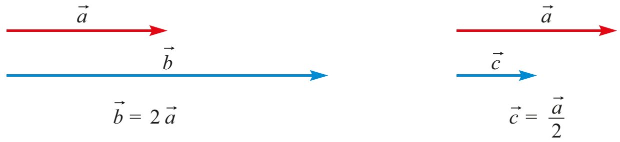
- o różnych kierunkach





$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

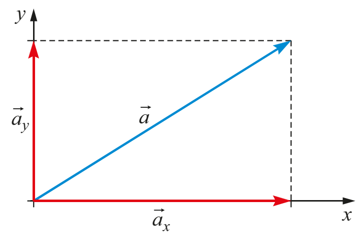
MNOŻENIE I DZIELENIE WEKTORA PRZEZ LICZBĘ



ROZKŁAD WEKTORA NA SKŁADOWE

Wektor $\vec{a}$ rozłożyliśmy na składowe $\vec{a}_x$ i $\vec{a}_y$.

W przedstawionym obok przykładzie są one prostopadłe do siebie.



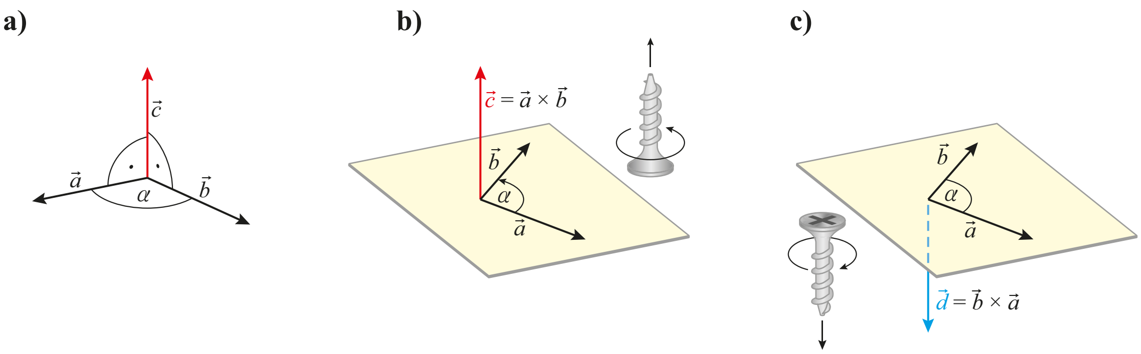
ILOCZYN SKALARNY

Iloczyn skalarny dwóch wektorów $c = \vec{a} \circ \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$ jest skalarem (liczbą) o wartości $c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$, gdzie kąt α jest kątem między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

ILOCZYN WEKTOROWY WRAZ Z REGUŁĄ ŚRUBY PRAWOSKRĘTNEJ

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ jest wektorem (rys. a), którego kierunek i zwrot określa reguła śruby prawoskrętnej (rys. b), a wartość $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$, gdzie kąt α jest kątem między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej iloczyn wektorowy $\vec{b} \times \vec{a}$ (rys. c) jest wektorem przeciwnym do $\vec{a} \times \vec{b}$, czyli $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$ (porównaj rys. b i c).



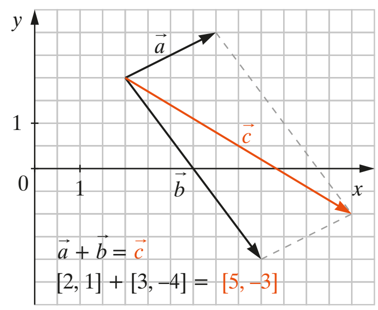
2. Działania na wektorach a działania na ich współrzędnych

Dodawaniu i odejmowaniu wektorów oraz ich mnożeniu przez liczbę odpowiadają analogiczne działania na ich współrzędnych:

$$[x, y] + [x', y'] = [x + x', y + y']$$

$$[x, y] - [x', y'] = [x - x', y - y']$$

$$a[x, y] = [ax, ay]$$

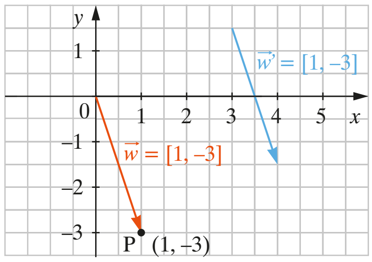


Na rysunku obok widzisz, że wektor $\vec{c}$, będący sumą wektorów $\vec{a} = [2, 1]$ i $\vec{b} = [3, -4]$, wyznaczony za pomocą reguły równoległoboku, rzeczywiście ma współrzędne $\vec{c} = [5, -3]$.

Wektor $\vec{c}$, wyznaczony za pomocą reguły równoległoboku, jest sumą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

3. Współrzędne wektora na płaszczyźnie

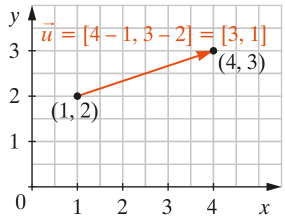
Gdy na płaszczyźnie wprowadzimy układ współrzędnych, także wektory możemy opisywać za pomocą współrzędnych. Dla odróżnienia od współrzędnych punktów zapisujemy je w nawiasach kwadratowych.

a) 

Gdy wektor ma początek w początku układu współrzędnych, współrzędne wektora równe są współrzędnym jego końca (patrz rys. a).

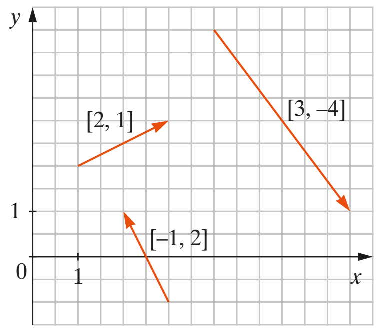
Wektor $\vec{w}$ zaczepiony w początku układu współrzędnych ma współrzędne [1, –3]. Takie same współrzędne ma wektor $\vec{w'}$, gdyż $\vec{w} = \vec{w'}$.

Współrzędne dowolnego wektora można obliczyć, odejmując od współrzędnych końca odpowiednie współrzędne początku (patrz rys. b).

b) 

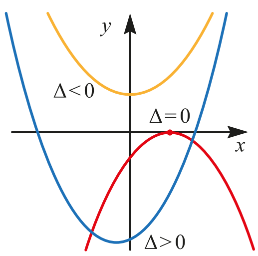
Wektor $\vec{u}$ o współrzędnych [3, 1] zaczepiony w punkcie (1, 2) ma koniec w punkcie (4, 3).

Zwróć uwagę, że współrzędne wektora mają intuicyjną interpretację. Wartość bezwzględna współrzędnej wskazuje, o ile jednostek mamy się poruszyć wzdłuż danej osi, a znak – w którą stronę (znak plus to ruch zgodnie ze zwrotem osi, znak minus to ruch przeciwny do zwrotu osi).

c) 

Wektory narysowane w układzie współrzędnych na rysunku c) można odczytać następująco:
wektor [2, 1] to wektor „2 w prawo, 1 w górę”,
wektor [–1, 2] to wektor „1 w lewo, 2 w górę”,
a wektor [3, –4] to wektor „3 w prawo, 4 w dół”.

4. Równanie kwadratowe



Równanie postaci:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, nazywamy **równaniem kwadratowym**.

Rozwiązania równania kwadratowego w zależności od **wyróżnika** tego równania, który ma postać:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

przedstawiono w tabeli.

$\Delta = 0$	$\Delta > 0$		$\Delta < 0$
$x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$	$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	brak rozwiązań rzeczywistych

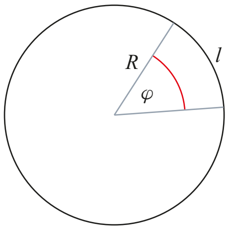
5. Miara łukowa kąta – radiany

Radian to jednostka miary łukowej kąta zaliczana do jednostek pomocniczych układu SI.

Miara łukowa kąta pozwala wyrazić wielkość kąta za pomocą długości łuku okręgu.
Kąt ma miarę jednego radiana, jeśli jest kątem środkowym opartym na łuku długości promienia, czyli kąt jednego radiana odpowiada łukowi okręgu o długości R (patrz rysunek poniżej).

Kąt pełny (360°) ma zatem 2π radianów, a kąt półpełny (180°) ma π radianów.
Kąt prosty (90°) ma $\frac{\pi}{2}$ radianów.

$$\mathbf{1\ radian} = \frac{\mathbf{360°}}{\mathbf{2\pi}} \approx \mathbf{57{,}3°}$$



Radiany oznacza się skrótem rad. **Długość** l **łuku okręgu** wiąże się z miarą łukową kąta φ w następujący sposób:

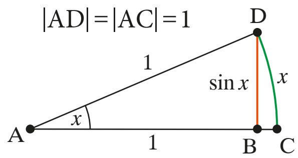
$$\boldsymbol{l = \varphi R}, \text{ czyli } \boldsymbol{\varphi = \frac{l}{R}}$$

gdzie R jest promieniem okręgu.

6. Przybliżenie sin $x \approx x$ dla małych kątów w mierze łukowej

Rysunek przedstawia wycinek koła o promieniu 1 i kącie x.

Miara łukowa kąta x jest liczbowo równa długości łuku CD, natomiast jego sinus – długości odcinka BD. Dla niewielkich kątów różnica między x oraz $\sin x$ jest bardzo mała.



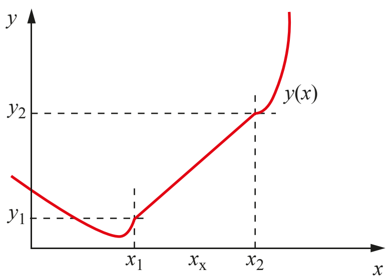
Zajrzyj do tabeli poniżej. W kolumnie „błąd względny” podano, o ile procent różni się x (w radianach) od $\sin x$ (wartość wyrażenia $\frac{x - \sin x}{\sin x} \cdot 100\%$).

x, stopnie	x, rad	sin x	BŁĄD WZGLĘDNY PRZYBLIŻENIA W %
50	0,872665	0,766044	14
20	0,349066	0,342020	2
10	0,174533	0,173648	0,5
5	0,087266	0,087156	0,13
3	0,052360	0,052335	0,05
2	0,034907	0,034899	0,02
1	0,017453	0,017452	0,005

7. Interpolacja liniowa

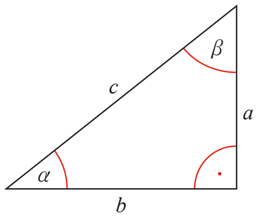
Jeżeli funkcja $y(x)$ między punktami (x_1, y_1) i (x_2, y_2) jest liniowa oraz x_x leży pomiędzy x_1 i x_2, to wartość funkcji y w punkcie x_x wynosi:

$$\boldsymbol{y(x_x) = y_x + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_x - x_x)}$$



8. Funkcje trygonometryczne i ich własności

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$



$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin 2\alpha$ $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$

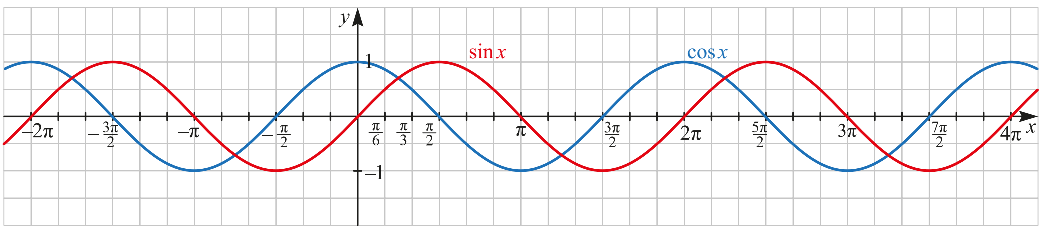
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$

- **Wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów**

	$0°$	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60° = \frac{\pi}{3}$	$90° = \frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\text{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

- **Wykresy funkcji sinus i cosinus**



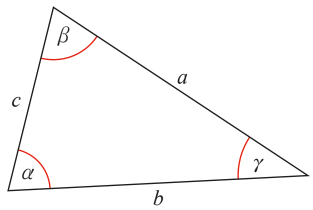
- **Twierdzenie cosinusów**

Dla dowolnego trójkąta na płaszczyźnie zachodzi:

$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$

$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta}$

$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$



9. Logarytmy

Logarytmem dodatniej liczby c przy podstawie a nazywamy wykładnik b potęgi, do której należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę c:

$$\log_a c = b \qquad a^b = c$$

Na przykład $\log_2 8 = 3$, bo $2^3 = 8$

Uwaga. Skrótowe zapisy $\log x$ oraz $\lg x$ oznaczają $\log_{10} x$.

Własności logarytmu:
dla $x > 0$, $y > 0$ i $a > 0$ oraz $a \neq 0$ mamy: $\log_a x^n = \mathrm{n} \cdot \log_a x$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \qquad \log_a x^n = \mathrm{n} \cdot \log_a x$$

10. Sumy indeksowane

Wyrażenie $\sum_{i=1}^{n} x_i$ to zapis przy użyciu tzw. sumy indeksowanej, oznacza on że należy dodać wszystkie wyrażenia o indeksach od $i = 1$ do $i = n$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n$$

Dzięki temu zapisowi można dużo prościej zapisać wzory, w których pojawia się dodawanie wyrażeń powiązanych różnymi zależnościami, np.

- zapis wyrażenia na opór zastępczy pięciu oporników o indeksach od R_1 do R_5:

$$\frac{1}{R_z} = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$$

- zapis wyrażenia na moment bezwładności czterech mas punktowych, każda znajdująca się w innej odległości od osi obrotu:

$$I = \sum_{i=1}^{4} m_i \cdot r_i^2 = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 + m_4 \cdot r_4^2$$

Nowa teraz matura

I wiesz, jak zdać maturę

Twoje mocne strony

ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH
ćwiczenie rozwiązywania zadań i arkuszy maturalnych

VADEMECUM
powtarzanie wiadomości połączone z rozwiązywaniem zadań typu maturalnego

CYFROWE WSPOMAGANIE NAUKI

- **APLIKACJA** – materiały cyfrowe zintegrowane z Vademecum i Zbiorem zadań maturalnych ułatwiające przygotowania do egzaminu *app.nowaterazmatura.pl*
- **SERWIS MATURALNY** – wszystkie niezbędne informacje o maturze *nowaterazmatura.pl*

Nowa Era Sp. z o.o.

www.nowaera.pl nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-4927-8