

D A N I E L
T A M M E T

Z A N U R Z E N I
W L I C Z B A C H

Jak matematyka
kształtuje nasze życie

Tłumaczenie

ZUZANNA LAMŻA

Szkolne intuicje

Dziennikarze telewizyjni miewają czasem słabsze momenty – od czasu do czasu wycinają głupi numer nie-szczęsnemu ministrowi edukacji. W asyście kamer, przebijając się przez makijaż, prowadzący układa swoje notatki, odchrząkuje i mówi: „Panie ministrze, ostatnie pytanie. Ile to będzie osiem razy siedem?”.

Takie sceny zawsze wywołują we mnie westchnienie – smuci mnie, kiedy matematykę sprowadza się do przypominania sobie (albo raczej nieprzypominania sobie) szkolnej regułki.

Raz w podobnej sytuacji prezenter chciał wiedzieć, ile będzie kosztować czternaście długopisów, jeśli na czterech widnieje cena 2,42 euro. „Nie mam zielonego pojęcia” – wystękał minister. Publiczność zawyła z uciechy. Oczywiście tego typu pytania zadaje się z pewną ewidentną nadzieją na porażkę – a politycy zawsze starają się przewidzieć i spełnić nasze oczekiwania. Czy powinniśmy zatem być aż tak zaskoczeni, kiedy właściwie oceniając sytuację, podają zły wynik?

Tak naprawdę nie da się do końca pojąć matematyki: liczba rzeczy, których każdy z nas o niej nie wie, jest nieskończona. Któryś z jej aspektów zawsze wprawia nas w zakłopotanie – ja na przykład muszę przyznać, że nie czuję żadnej więzi z algebrą.

Odkrycie to zawdzięczam mojemu nauczycielowi matematyki z liceum, panu Baxterowi.

Dwa razy w tygodniu siadałem w ławce i robiłem wszystko, żeby się nie wychylać. Miałem trzynaście, może czternaście lat. U poprzedników pana Baxtera byłem prymusem: teoria liczb, statystyka czy prawdopodobieństwo nie sprawiały mi najmniejszych trudności. Teraz okazało się, że jestem algebraicznym zerem.

Czasy się zmieniały, ja się zmieniałem. Nagle miałem za dużo ciała – całe te pęczniejące kończyny i pocący się mózg – i kompletnie nie wiedziałem, co z nim zrobić: moim nogom i rękom zaczęły zewsząd zagrażać ostre kanty, stale padały ofiarą niskich blatów i wąskich korytarzy. Pan Baxter pozostawał nieczuły na moją niedolę. Ciała – przynajmniej tak kazano nam wierzyć – szkodziły matematyce. Tłuste włosy, nieświeży oddech, pryszczki – w każdy wtorek i czwartek to wszystko na godzinę znikало. Odarte z cielesności młode umysły unosiły się w sferę czystego rozumowania. Książki zmieniały się w równoległoboki, miasta w obwody, przepisy kulinarne – w proporcje. Pozbawieni oparcia, po omacku szukaliśmy drogi w tym rozrzedzonym powietrzu.

W takiej atmosferze poznawałem podstawy algebry. Samo słowo, jak nam powiedziano, miało arabskie korzenie – pochodziło z tytułu traktatu napisanego w dziewiątym wieku przez perskiego matematyka Al-Chuwarizmiego (nawiasem mówiąc, wyraz „algorytm” jest zniekształconą łacińską formą jego nazwiska). Pamiętam, że ta egzotyczna proveniencja wywarła na mnie duże wrażenie. Kłębiące się zawijasy równań przywodziły mi na myśl kaligrafię, nie uważałem jednak, że są piękne. Leksykograficzny gruz – te wszystkie ikсы, igrekі i zetki – zaśmiecał strony mojego podręcznika. Posłużenie się najmniej używanymi

literami tylko pogłębiało moje uprzedzenia – wtrącone w całkiem dobre obliczenia wydawały mi się po prostu brzydkie.

Weźmy na przykład $x^2 + 10x = 39$. Takie mieszaniny wywoływały u mnie grymas bólu. Sto razy bardziej wolałem to wypowiedzieć: jakaś liczba kwadratowa (1 albo 4, albo 9 etc.) dodać wielokrotność dziesięciu (10, 20, 30 etc.) równa się trzydzieści dziewięć; $9 (3 \times 3) + 30 (3 \times 10) = 39$; trzy jest wspólnym czynnikiem, $x = 3$. Po latach dowiedziałem się, że Al-Chuwarizmi również wyrażał słowami wszystkie problemy, którymi się zajmował.

Pan Baxter, tęgi i z wieczną zadyszka, wymagał od nas ścisłego trzymania się ćwiczeń. Nie miał cierpliwości do parafrazowania. Zmarszczenie brwi i upominające „przeczytaj rozdział jeszcze raz” szybko podcinały podniesione dłonie. Był służbiłą oddanym podręcznikowym metodom – kiedy pokazywałem mu swoje prace, ubolewał, że ich nie stosowałem. Nie odjąłem tej samej wartości od obu stron równania. Nie zrobiłem nic z nawiasami. Jego czerwony długopis pokrywał płomieniem starannie zapisane słowa mojego rozwiązania.

Inny przykład mojego wykołowanego rozumowania: $x^2 = 2x + 15$. Ujmuję to tak: jakaś liczba kwadratowa (1, 4, 9 etc.) jest równa o piętnaście więcej niż wielokrotność dwójki (2, 4, 6 etc.). Innymi słowy, szukamy liczby kwadratowej powyżej siedemnastu (które jest o dwa większe niż piętnaście). Pierwszą kandydatką jest dwadzieścia pięć (5×5), która jest w istocie o piętnaście większa od dziesięciu (wielokrotności dwójki) – $x = 5$.

Kilkoro uczniów przyswoiło metody pana Baxtera, więszosci, jak mnie, nigdy się to nie udało. Nie mogę się oczywiście wypowiadać w imieniu reszty, ale jak dla mnie to było bolesne doświadczenie. Cieszyłem się, kiedy rok się skończył i mogłem zająć

się inną matematyką, ale jednocześnie w pewnym sensie czułem wstyd: poniosłem klęskę, nie zrozumiałem. Zajęcia te zaszczepiły we mnie nieprzemijającą podejrzliwość względem wszystkich równań. Algebra i ja nigdy do końca się nie pogodziliśmy.

Pan Baxter udzielił mi jednak przynajmniej jednej pożytecznej lekcji – nauczyłem się, jak nie uczyć. Korzystałem z tej wiedzy przy wielu okazjach. Dwa lata po tym, jak skończyłem szkołę, otworzywszy pewnego ranka gazetę, natknąłem się na ogłoszenie agencji poszukującej korepetytorów. Uczyłem angielskiego na Litwie podczas mojego roku przerwy – odkryłem wtedy, że lubię to robić. Zgłosiłem się więc. Rozmowa kwalifikacyjna odbywała się w służącym za biuro salonie pewnej leciwej kobiety imieniem Grace. Haftowane poduszki gniotły mnie w krzyż, kiedy usiadłem naprzeciw jej biurka. Tapetę, jeśli dobrze pamiętam, pokrywały maleńkie ptaki i pszczoły.

Spotkanie nie trwało długo.

„Czy sprawia panu przyjemność uczenie innych czegoś nowego?”

„Czy bierze pan pod uwagę indywidualny sposób przyswajania wiedzy każdego ucznia?”

„Czy może pan pracować zgodnie z ustalonym wcześniej programem nauczania?”

Jej pytania zawierały w sobie odpowiedzi, jak w dialogach powtarzanych na zajęciach z języka obcego: „Tak, mogę pracować zgodnie z ustalonym programem”.

Po mniej więcej dziesięciu minutach czegoś takiego stwierdziła: „Świetnie, z pewnością pasuje pan do naszego zespołu. Mamy już korepetytorów z angielskiego, a na inne języki nie ma specjalnie popytu... Co z matematyką na poziomie szkoły podstawowej?”.

Co z nią? Byłem chętny.

Kalendarz Grace nie pozwalał mi próżnować. Obszar, na którym uczyłem, rozciągał się aż do pobliskiego miasteczka, oddległego o osiem kilometrów, a dojazd do najdalej położonych domów zajmował mniej więcej tyle co sama lekcja. Kiedy zaczynałem, byłem zestresowany, ale rodziny bardzo mi pomagały. Dzieci, gdzieś między siódmym a jedenastym rokiem życia, okazywały się w większości grzeczne i pilne, a uśmiechy i przyjazne skinienia ich rodziców łagodziły moje zdenerwowanie. Po jakimś czasie przestałem się martwić i zacząłem nawet z przyjemnością czekać na nasze cotygodniowe spotkania. Czy będzie na miejscu, jeśli przyznam, że miałem ulubionego ucznia? Był to piegowaty ośmiolatek o brązowych włosach, mały jak na swój wiek. Kiedy pierwszy raz pojawiłem się u niego w domu, dosłownie drżał z nieśmiałości. Zaczęliśmy z podręcznikami, których użyczyła mi agencja, ale były stare i cuchnące i niebawem ich odstręczające okładki rozleciały nam się w rękach. Zastąpiły je nowe, śliczne i kolorowe, które chłopiec dostał na Gwiazdkę, ale wypełniający je żargon zatruwał mu umysł. Porzuciliśmy więc książki i znaleźliśmy lepszy sposób na wspólne spędzenie godziny. Mnóstwo gadaliśmy.

Przy jakiejś okazji wyszło na jaw, że z zamięłowaniem zbiera naklejki z piłkarzami i może z pamięci wyrecytować nazwiska wszystkich przedstawionych na nich graczy. Z dumą pokazywał mi dołączany do nich album.

„Umiesz powiedzieć, ile masz naklejek?” – zapytałem go. Przyznał, że nigdy ich nie liczył. Album miał wiele stron.

„Gdybyśmy liczyli naklejkę po naklejce, dojście do ostatniej strony zajęłoby nam sporo czasu” – powiedziałem. „A gdybyśmy zamiast tego liczyli po dwie?” Chłopiec zgodził się, że

byłoby szybciej. Dwa razy szybciej, podkreśliłem. „A gdybyśmy liczyli po trzy naklejki? Doszlibyśmy do końca w jeszcze krótszym czasie?” Chłopiec przytaknął. Tak, doszlibyśmy: trzy razy szybciej.

„Gdybyśmy liczyli po pięć naklejek naraz, skończylibyśmy pięć razy wcześniej” – przerwał mi. Uśmiechnął się w odpowiedzi na mój uśmiech. Otworzyliśmy album i policzyliśmy naklejki na pierwszej stronie: kładłem moją dłoń – była większa niż jego – na każdych pięciu. Zmieściły się trzy dłonie – było piętnaście naklejek. Na następnej piłkarzy było ciut mniej – dwie całe dłonie i trzy palce: trzynaście – więc przenieśliśmy brakujące dwa na kolejną. Do siódmej strony doszliśmy do dwudziestu dłoni: setki naklejek. Odwracaliśmy strony, kładąc na każdej moją dłoń i liczyliśmy dalej. W sumie liczba naklejek urosła do ponad osiemdziesięciu dłoni (czterystu sztuk).

Po uporaniu się z albumem zaczęliśmy się zastanawiać, co by było, gdyby naklejki przeliczał jakiś olbrzym. Ustaliliśmy, że jego dłonią można by liczyć po dwadzieścia.

A co, jeśli ten sam olbrzym chciałby doliczyć do miliona?

Chłopiec myślał przez chwilę. „Może liczyłby w setkach: sto, dwieście, trzysta...” Zapytałem, czy wie, ile setek by trzeba, żeby dotrzeć do miliona. Pokręcił głową. Powiedziałem mu, że dziesięć tysięcy. Uniósł brwi. W końcu odezwał się: „Więc liczyłby po dziesięć tysięcy, prawda?” Potwierdziłem: to byłoby dla niego tak, jak dla nas liczenie do stu. „A gdyby był naprawdę wielki, mógłby liczyć w setkach tysięcy” – ciągnąłem. Doszedłby do miliona tak szybko, jak my do dziesięciu.

Pewnego razu podczas lekcji dotyczącej dodawania uderzyło go inne, niewielkie, lecz bardzo trafne spostrzeżenie. Przepisywał pracę domową, żebyśmy mogli przejść przez nią razem,

i z $12 + 9$ zrobiło mu się $19 + 2$. Zdał sobie sprawę, że mimo tego odpowiedź pozostała taka sama. Wynikiem obu działań, dwanaście plus dziewięć i dziewiętnaście plus dwa, jest dwadzieścia jeden. Przypadkowy błąd sprawił mu radość, kazał się zatrzymać i pomyśleć. Ja także przerwałem, bojąc się, że jakimś nieopatrzynym słowem przydepnę mu myśl. Później zapytałem go o znacznie większą sumę, coś w rodzaju $83 + 8$. Zamknął oczy i odliczył: „osiemdziesiąt dziewięć, dziewięćdziesiąt, dziewięćdziesiąt jeden”. Wiedziałem, że zrozumiał.

Z innych uczniów zapadła mi w pamięć jeszcze rodzina sikhów, u których spędzałem dwie godziny z rzędu w środowe popołudnia. Z tego, co sobie przypominam, niespecjalnie dogadywałem się z ojcem (biznesmenem o kierowniczych zapędach), ze strony matki za to nie doświadczyłem niczego poza życziwą uprzejmością. Mieli troje dzieci, dwóch chłopców i dziewczynkę – czekały na mnie zawsze przy stole w salonie, wciąż ubrane w swoje szkolne mundurki. Najstarszy był jedenastolatek: miał w sobie śmiałość pierworodnego syna, trochę się popisywał. Jego siostra wiecznie mu ustępowała. Środkowy chłopiec dużo się śmiał; miało się wrażenie, że śmieje się za całą rodzinę.

Na początku cała trójka nie do końca brała na poważnie blado okularnika przed sobą. Razem mieli o dziesięć lat więcej ode mnie. Wyglądałem zbyt młodo i najprawdopodobniej tak brzmiałem, jeszcze bez tego gładkiego rytmu, którego nabywa się z doświadczeniem. Mimo wszystko udało mi się wyrobić sobie pozycję. Pomogłem im z tabliczką mnożenia, nad którą musieli sporo popracować. Byli mocno zdziwieni, kiedy okazało się, że na ich błędy i niepewność nie reaguję krzykiem. Przeciwnie – mówiłem im, kiedy byli blisko właściwej odpowiedzi.

– Ile jest osiem razy siedem?

- Pięćdziesiąt... – najstarszy chłopiec był w rozterce.
- Tak... – zachęcałem.
- Pięćdziesiąt cztery – zaryzykował.
- Prawie – powiedziałem. – Pięćdziesiąt sześć.

Ten moment wahania, charakterystyczny dla wielu moich uczniów, intrygował mnie. Oznaczał nie tyle ignorancję, ile niezdecydowanie. Zdałem sobie sprawę, że nie jest tak, że chłopiec nie ma pojęcia, jakie jest rozwiązanie. Tak naprawdę przychodzi mu do głowy wiele rozwiązań, zbyt wiele – niemal wszystkie błędne. Bez wiedzy koniecznej do rozproszenia mgły w swoim umyśle uczeń staje bezradnie wobec deprymującego natłoku złych odpowiedzi, z których musi wybrać jedną.

O czym myślał, dopytywałem, kiedy wybierał pięćdziesiąt cztery? Przyznał, że rozważał wcześniej pięćdziesiąt trzy, pięćdziesiąt sześć, pięćdziesiąt siedem i pięćdziesiąt pięć (w tej kolejności). Był pewien, że pięćdziesiąt jeden i pięćdziesiąt to za mało, a pięćdziesiąt osiem i pięćdziesiąt dziewięć – za dużo. Zapytałem, dlaczego w końcu wybrał pięćdziesiąt cztery zamiast pięćdziesięciu trzech. Odpowiedział, że myślał o ósemce w pytaniu i o tym, że pięćdziesiąt to połowa ze stu, a połowa z ośmiu wynosi cztery.

Przeszliśmy do omawiania różnicy między liczbami parzystymi a nieparzystymi. Osiem jest parzyste, siedem – nieparzyste. Co się stanie, jeśli pomnożymy liczbę nieparzystą przez parzystą? Większa niepewność pojawiła się na twarzach dzieci. Podałem kilka przykładów: dwa razy siedem (czternaście), trzy razy sześć (osiemnaście), cztery razy pięć (dwadzieścia) – każdy wynik był liczbą parzystą. Czy wiedzą dlaczego? Tak, powiedział w końcu młodszy syn: mnożenie przez liczbę parzystą to jakby budowanie par. Dwa razy siedem tworzy parę siódemek,

cztery razy pięć to dwie pary piątek, trzy razy sześć to trzy pary trójek. Co w takim razie z osiem razy siedem? To cztery pary siódemek, odparł chłopiec.

Pary sprawiały, że każda liczba nieparzysta parzyściała: jedna skarpetka stawiała się dwiema, trzy sześcioma, pięć dzieścioma, siedem czternastoma, a dziewięć – osiemnastoma. Ostatnia cyfra pary zawsze będzie liczbą parzystą.

Mgła spowijająca osiem razy siedem rozwiewała się. Pięćdziesiąt trzy jako możliwa odpowiedź natychmiast zniknęło, w jego ślad poszły pięćdziesiąt siedem i pięćdziesiąt pięć. Zostało pięćdziesiąt cztery i pięćdziesiąt sześć. Jak rozstrzygnąć między nimi? Liczbę pięćdziesiąt cztery, podpowiedziałem im, tylko sześć dzieli od sześćdziesięciu: pięćdziesiąt cztery – jak sześćdziesiąt – była podzielna przez sześć. Jak sześćdziesiąt, pięćdziesiąt cztery będzie więc odpowiedzią na pytanie zawierające szóstkę (lub liczbę podzielną przez sześć), ale nie siódemkę czy ósemkę.

Po tym procesie eliminacji, który był niczym innym jak prostym wnioskowaniem, pozostało tylko pięćdziesiąt sześć. Pięćdziesiąt sześć to dwie siódemki od siedemdziesięciu, trzy ósemki od osiemdziesięciu. Osiem razy siedem równa się pięćdziesiąt sześć.

Jedyną dorosłą osobą, którą zdarzyło mi się uczyć, była gospodyni domowa o skórze koloru miedzi i długim nazwisku złożonym z samogłosek i spółgłosek, których nigdy nie widziałem w takiej kolejności. Miała ambicję, jak przez telefon poinformowała mnie Grace, żeby stać się profesjonalną księgową. Dla mnie nie był to specjalnie obiecujący początek. Założenie konkretnego celu klóciło się z moją naiwną wizją matematyki jako czegoś kreatywnego, czym się można bawić.

To nagle zainteresowanie gospodyni domowej liczbami wydało mi się niemal nieprzyzwoite: jak gdyby chciała zaprzyjaźnić się z nimi tylko na tej zasadzie, na jakiej szuka się przyjaźni wśród dobrze ustawionych ludzi.

Szybko naprawiłem błąd w ocenie sytuacji. Upředzenia wobec mojej nowej uczennicy były krzywdzące. To była niechęć dziecięcego korepetytora – nie wiedziałem nic o uczeniu dorosłych, przewidywaniu ich potrzeb i oczekiwań.

Pewnego dnia w jej wyłożonej białymi kafelkami kuchni rozmawialiśmy o liczbach ujemnych. Trudno jej było je sobie wyobrazić, zupełnie jak szesnastowiecznym matematykom, którzy nazywali je „absurdalnymi” i „zmyślonymi”. Co to znaczy odejmować coś od niczego? Próbowałem to wytłumaczyć, ale ku własnemu zirytowaniu zorientowałem się, że brakuje mi słów. W jakiś sposób udało jej się zrozumieć.

„Czyli to jak hipoteka?”

Nie wiedziałem, co to jest hipoteka – przyszła jej kolej na wyjaśnienia. W miarę jak mówiła, zdawałem sobie sprawę, że wie o liczbach ujemnych znacznie więcej niż ja. Jej słowa miały prawdziwą wartość: stał za nimi bezcenny zbiór konkretnych, osobistych doświadczeń.

Innym razem przerabialiśmy ułamki niewłaściwe, z licznikiem większym od mianownika, takie jak cztery trzecie ($\frac{4}{3}$) czy siedem czwartych ($\frac{7}{4}$), które pomagają nam spojrzeć inaczej na jedności. Jeśli na przykład pomyślimy o jedynce jako odpowiedniku trzech trzecich, to cztery trzecie będzie innym sposobem na opisanie jeden i jedna trzecia. Siedem czwartych przypominało, zgodziliśmy się, dwa jabłka pokrojone w ćwiartki (przyjmując, że „jeden” to cztery czwarte), z których jedną ktoś zjadł.

Nasza godzina dobiegła końca, ale rozmawialiśmy dalej. Gawędziliśmy o ułamkach i o tym, co się stanie, jeśli podzielimy na pół połowę połowy połowy i tak dalej. W równym stopniu zadziwiał nas oboje fakt, że takie przepoławianie mogłoby teoretycznie ciągnąć się w nieskończoność. Dzielenie się wspólnym zadziwieniem sprawiało nam przyjemność, przypominało plotkowanie. I tak jak w przypadku plotki, było to coś, o czym oboje wiedzieliśmy i nie wiedzieliśmy jednocześnie.

A potem powiedziała coś, czego nigdy nie zapomnę.

Stwierdziła: „Nie ma takiej rzeczy, po której podzieleniu zostalibyśmy z niczym”.